НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ ПО ВЫБОРУ ПРЕДЛАГАЕМЫЕ В 2018/19 УЧЕБНОМ ГОДУ СТУДЕНТАМ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ

МОСКВА
2018

Содержание

Перечень курсов и семинаров на выбор студентов

Во всех таблицах ниже **толстым шрифтом** набраны «толстые» курсы и семинары[1] с нагрузкой 4 час/нед, дающие 5 кред/сем. Остальные, «тонкие» курсы и семинары идут 2 час/нед и дают 3 кред/сем. Занятия, названные по-английски, происходят на английском языке. Некоторые из названных по-русски занятий тоже могут проводиться на английском, если на то будет желание аудитории. Все такие занятия снабжены английскими аннотациями.

Курсы начального уровня

Пререквизиты к этим курсам не выходят за рамки первых двух лет бакалавриата. Они рекомендуются студентам младших курсов[2] как введения в те разделы математики, где планируется дальнейшая специализация, а также старшекурсникам, желающим расширить математический кругозор в областях, выходящих за рамки выбранной специализации. В «Содержании» на стр. 2–4 ссылки на описания курсов начального уровня набраны *курсивом*.

ОСЕНЬ

- **Алгоритмы и автоматы, Ю. В. Саватеев**
- **Galois Theory, C. Brav**
- **Введение в алгебраическую топологию, С. К. Ландо**
- **Алгебраическая геометрия. Вводный геометрический курс, В. С. Жгун**
- **Симметрические функции, Е. Ю. Смирнов**
- **Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру, А. Л. Городенцев**
- **Введение в функциональный анализ, А. К. Погребков**
- **Hamiltonian Mechanics, I. M. Krichever**
- Математическая статистика[3], А. В. Клименко, А. С. Скрипченко
- Цепи Маркова, А. Дымов
- **Классическая теория поля, П. А. Сапонов**
- **Сложные системы: от физики к экономике, С. М. Апенко**

ВЕСНА

- **Введение в теорию чисел, В. З. Шарич**
- **Дополнительные главы алгебры, Л. Г. Рыбников**
- **Римановы поверхности, С. М. Львовский**
- **Дифференциальная геометрия, О. В. Шварцман**
- **Коммутативная алгебра, А. С. Хорошкин**
- Теория пучков, Н. С. Маркарян
- **Calculus of Variations, M. Mariani**
- **Введение в квантовую теорию, В. В. Лосяков**
- **Специальные функции, С. М. Хорошкин**

[1] Деление занятий на «курсы» и «семинары» обусловлено рядом формальностей принятого в НИУ ВШЭ регламента учебного процесса и может не отражать фактического способа их проведения. Подробности о содержании и стиле проведения каждого курса или семинара см. на странице с его описанием.

[2] В частности, большинство этих курсов подойдут второкурсникам в качестве «антимайноров».

[3] Курс проходит только во втором модуле (ноябрь – декабрь). Интенсивность: 2 пары в неделю. Стоимость: 3 кредита. Пререквизит: теория вероятностей. Рекомендуется студентам третьего курса и выше.

Специальные курсы

Это курсы для более глубокого изучения тех разделов, по которым планируется дальнейшая специализация. В «Содержании» на стр. 2–4 ссылки на все специальные курсы набраны прямым шрифтом.

ОСЕНЬ

- **Алгебраическая геометрия, В. А. Вологодский**
- **Теория чисел, М. В. Финкельберг**
- Аналитическая теория чисел, А. Б. Калмынин
- **Группы и алгебры Ли, Г. И. Ольшанский**
- **Автомормизмы многообразий, кольца Кокса и локально нильпотентные дифференцирования, И. В. Аржанцев**
- Arithmetical Dynamics[1], C. Favre
- Функциональный интеграл, А. Г. Семёнов

ВЕСНА

- **Комплексная геометрия, А. В. Пенской**
- **Алгебраическая топология, А. Г. Горинов**
- **Differential topology, A. A. Gaifullin**
- Аналитическая теория чисел, А. Б. Калмынин
- **Группы и алгебры Ли – 2, Е. Б. Фейгин**
- **Представления групп треугольных матриц над конечными полями, А. А. Кириллов**
- **Dynamics And Ergodic Theory, A. S. Skripchenko, A. V. Zorich**
- **Случайные процессы, М. Л. Бланк**
- Analysis of several complex variables, A. A. Glutsyuk
- **Функциональный анализ, А. Ю. Пирковский**
- **Уравнения с частными производными, В. В. Чепыжов**
- **Квантовая теория поля, А. Г. Семёнов**
- **Статистическая механика: строгие результаты, С. Б. Шлосман**
- **Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые модели, А. М. Поволоцкий**
- **Финансовая математика, А. В. Колесников**

Курсы СКОЛТЕХА, читаемые в Сколково

ОСЕНЬ

- **Конформные теории, М. А. Берштейн**

ВЕСНА

- **Калибровочные теории, А. А. Рослый**

Англоязычные курсы начального уровня

Курс «Mathematical methods of science» является *обязательным* для студентов магистратуры и может быть взят в качестве спецкурса студентами бакалавриата. Все остальные курсы в этом разделе имеют *самый начальный* уровень и предназначены в первую очередь для иностранных студентов магистерской программы «Mathematics» и совместной с НМУ программы «Math in Moscow».

ОСЕНЬ

- **Algebra and Arithmetics, V. S. Zhgoon**
- **Classical Analysis and ODE, T. Takebe**
- **Introduction to Combinatorial Theory, Yu. M. Burman**
- **Topics in differential and algebraic topology, P. E. Pushkar**
- **Mathematical methods of science, A. S. Tikhomirov**

ВЕСНА

- **Geometry and Topology, V. A. Kiritchenko**
- **Basics of Functional Analysis, M. Z. Rovinsky**
- **Advanced Linear Algebra, K. G. Kuyumzhiyan**

[1] Курс будет читаться только в первом модуле (Сентябрь–Октябрь), нагрузка: 1 лекция в неделю, стоимость: 2 кредита.

Нематематические курсы, читаемые на факультете математики

Эти курсы читаются сотрудниками других факультетов и предназначены тем, кто хочет изучить те или иные области за пределами математики. Все курсы из этого раздела, за исключением курсов «Программирование» (оба семестра), «Эконометрика» и «Машинное обучение» попадают под ограничение на суммарное число нематематических курсов в ИУПе наравне с курсами, читаемыми на других факультетах ВШЭ. Указанные три курса в этом ограничении не учитываются.

ОСЕНЬ

- **Основы программирования на Python, 1-й семестр[2], М. С. Густокашин**
- **Машинное обучение, И. В. Щуров**
- **Математические модели экономических систем, М. И. Левин**
- **Математическая лингвистика, Б. Л. Иомдин**

ВЕСНА

- **Основы программирования на Python, 2-й семестр, В. Е. Иваннокова**
- **Эконометрика, П. Н. Катышев**
- **Методы сбора и анализа социологических данных, Д. С. Шмерлинг**
- **Философия–2, А. В. Михайловский**

Семинары для младших курсов

ОСЕНЬ

- Основные понятия математики[11], Ю. М. Бурман, С. М. Львовский
- Геометрия и группы[1], О. В. Шварцман
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко
- Проективная алгебраическая геометрия[1], И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров
- Combinatorics of Vassiliev invariants, М. Э. Казарян, С. К. Ландо
- Введение в теорию моделей, В. Б. Шехтман
- Алгебраический семинар для младших курсов[1], В. А. Гриценко
- **Многогранники и выпуклая геометрия[1], А. И. Эстеров**
- **Элементарная теория поля на решётке[1], М. Б. Скопенков**

ВЕСНА

- Избранные главы дискретной математики[1] И. В. Артамкин
- Геометрия и группы[1], О. В. Шварцман
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко
- Проективная алгебраическая геометрия[1], И. В. Артамкин, А. Л. Городенцев
- Combinatorics of Vassiliev invariants, М. Э. Казарян, С. К. Ландо
- Математика физических явлений, П. И. Арсеев

[2] Курс в формате «blended learning» по материалам https://ru.coursera.org/learn/python-osnovy-programmirovaniya.
[11] Рекомендуется *только* студентам первого курса.
[1] Рекомендуется студентам первого курса.

Семинары для старших курсов и аспирантов

ОСЕНЬ

- Выпуклая и алгебраическая геометрия, В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнов, А. И. Эстеров
- Геометрия и анализ в теории дифференциальных уравнений, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный
- Современные проблемы математической логики, Л. Д. Беклемишев, А. В. Кудинов, Ф. Н. Пахомов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман
- Теория представлений, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников
- Тороидальные алгебры, интегрируемые системы и уравнения Бете, Б. Л. Фейгин
- **Фробениусовы многообразия, С. М. Натанзон, П. И. Дунин–Барковский**
- **Гомотопическая топология, А. Г. Горинов**
- Harmonic analysis, A. Yu. Pirkovskii
- Integrable Systems, I. Marshall

ВЕСНА

- Выпуклая и алгебраическая геометрия В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнов, А. И. Эстеров
- Геометрия и анализ в теории дифференциальных уравнений, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный
- Современные проблемы математической логики, Л. Д. Беклемишев, А. В. Кудинов, Ф. Н. Пахомов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман
- Теория представлений, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников
- Тороидальные алгебры, интегрируемые системы и уравнения Бете, Б. Л. Фейгин
- Торические многообразия, К. Г. Куюмжиян
- Deformation theory with the view of Mori theory, V. S. Zhgoon
- **Введение в симплектическую и контактную геометрию, П. Е. Пушкарь**
- Smooth, PL-, and topological manifolds, A. G. Gorinov
- **Геометрия и топология банаховых пространств, П. В. Семёнов**
- Introduction to the theory of integrable equations, A. K. Pogrebkov
- Перестановки, накрытия, интегрируемость, М. Э. Казарян, С. К. Ландо
- Сюжеты из теории группы кос и теории квантовых групп: происхождение и применение *R*-матриц, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов
- **Математика процессов переноса, К. П. Зыбин**

Обязательный математический семинар магистерской программы «Mathematics»

Этот семинар разделён на три независимые секции, каждая из которых работает в течение обоих семестров с интенсивностью 1 пара в неделю. Каждый студент магистратуры, обучающийся по программе «Mathematics», *обязан* получить оценку за работу в одной из секций этого семинара в каждом из четырёх семестров своего обучения[1]. Для этого достаточно участвовать в работе выбранной секции и выполнить требования, предъявляемые к студентам её руководителями. Студенты других образовательных программ факультета могут в каждом из семестров включить в свой учебный план одну из секций этого семинара (осенний семестр оценивается в 3 кредита, весенний — в 4 кредита) и получить оценку за семинар на тех же условиях.

ОСЕНЬ

- Geometric structures on manifolds M. S. Verbitsky
- Probability and Stochastics, A. V. Kolesnikov, V. Konakov
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский

ВЕСНА

- Geometric structures on manifolds M. S. Verbitsky
- Probability and Stochastics, A. V. Kolesnikov, V. Konakov
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский

[1] В разных семестрах можно выбирать разные секции.

Математические семинары, организуемые совместно с партнёрами факультета

Осень

- Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика (НМУ; С. М. Натанзон, О. В. Шварцман, О. Шейнман)
- Representations and Probability (IUM, Seklov Math Inst; A. I. Bufetov, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski)
- **Теория струн и кластерные многообразия, (СКОЛТЕХ; А. В. Маршаков)**

Весна

- Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика (НМУ; О. В. Шварцман, С. М. Натанзон, О. Шейнман)
- Representations and Probability (IUM, Seklov Math Inst; A. I. Bufetov, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski)

Курсы, рекомендуемые студентам, занявшимся прикладной математикой

Студентам, у которых курсовая или выпускная квалификационная работа посвящена приложениям математики, рекомендуется включить в свой ИУП следующие из перечисленных выше курсов:

Осень

- Алгоритмы и автоматы
- Математическая статистика
- Сложные системы: от физики до экономики
- Цепи Маркова
- Машинное обучение

- Секция «Probability and Stochastics» обязательного НИС магистерской программы «Mathematics»

Весна

- Уравнения в частных производных
- Вариационное исчисление
- Случайные процессы
- Финансовая математика
- НИС Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые модели
- Секция «Probability and Stochastics» обязательного НИС магистерской программы «Mathematics»
- Статистическая механика: строгие результаты

Описания курсов на русском

Курсы с пометкой «MAY BE GIVEN IN ENGLISH» будут читаться на английском, если слушатели того захотят[1], их описания на английском доступны ниже разделе «Course descriptions in English». Курсы без пометки «MAY BE GIVEN IN ENGLISH» читаются только на русском.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «АВТОМОРМИЗМЫ МНОГООБРАЗИЙ, КОЛЬЦА КОКСА И ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ»

ЛЕКТОР: И. В. Аржанцев

НАЗВАНИЕ: Автомормизмы многообразий, кольца Кокса и локально нильпотентные дифференцирования

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: С каждым алгебраическим многообразием связана его группа автоморфизмов. Эти группы весьма разнообразны. Например, группы автоморфизмов проективного пространства, аффинного пространства и алгебраического тора это группы принципиально разных типов. Для изучения групп автоморфизмов в настоящее время разработано несколько эффективных методов. Так, теория колец Кокса позволяет сводить описание групп автоморфизмов широкого класса компактных многообразий к аффинному случаю или, более точно, к описанию группы однородных автоморфизмов градуированных алгебр. Известно, что связная алгебраическая группа матриц порождается своим максимальным тором и одномерными корневыми подгруппами. Действию тора соответствует градуировка на соответствующей алгебре, а действию корневой подгруппы — однородное локально нильпотентное дифференцирование. Такой подход к описанию групп автоморфизмов восходит к классической работе Демазюра (1970), где были впервые определены торические многообразия, а также вычислена группа автоморфизмов компактного торического многообразия.

ПРОГРАММА: Мы начнем курс с систематического изучения градуированных алгебр и локально нильпотентных дифференцирований на таких алгебр. После этого будет определено кольцо Кокса алгебраического многообразия и связанная с ним конструкция факторизации. Это позволит найти группы автоморфизмов многих многообразий, описать свойства действия группы автоморфизмов и использовать полученные результаты для изучения геометрии многообразий.

УЧЕБНИКИ:

1. I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface. Cox rings. Cambridge Studies in Adv. Math. 144, NY, 2015.

2. David Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Alg. Geom. 4 (1995), 17–50.

3. M. Demazure. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 (1970), 507–588.

4. G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Enc. Math. Sci. 136, Springer (2006).

[1] Например, при наличии англоговорящих слушателей.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

ЛЕКТОР: В. А. Вологодский

НАЗВАНИЕ: Алгебраическая геометрия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Цель этого курса — помочь слушателю овладеть основами теории схем и их когомологий в объёме учебника Р. Хатрсхорна.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: коммутативная и гомологическая алгебра.

ПРОГРАММА:

- Определение и первоначальные свойства схем.
- Дивизоры, группа Пикара.
- Когерентные пучки и их когомологии.
- Дифференциальные формы и когомологии де Рама. Двойственность Серра.
- Кривые. Теорема Римана – Роха, формула Римана – Гурвица.
- Характеристические классы, общая теорема Римана – Роха.
- Поверхности. Теорема Ходжа об индексе.
- Доказательство гипотез Вейля о дзета-функциях кривых над конечными полями.
- Введение в теорию деформаций и пространства модулей. Конструкция рациональных кривых на многообразиях Фано: ”bend and break” лемма.

УЧЕБНИКИ:

G. Kempf, *Algebraic Varieties*.

Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*.

J. Kollar, *Rational Curves on Algebraic Varieties*.

КОММЕНТАРИЙ: Если слушателям будет угодно, курс будет читаться на английском языке.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВОДНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КУРС»

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

ЛЕКТОР: В. С. Жгун

НАЗВАНИЕ: Алгебраическая геометрия. Вводный геометрический курс

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая геометрия изучает фигуры, локально устроенные как множество решений системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве. С одной стороны, это приводит к чёткому алгебраическому описанию глубоких геометрических свойств, с другой стороны, даёт «живое» геометрическое ви́дение «сухой» алгебры, благодаря чему абстрактные манипуляции с формулами приобретают ясный геометрический смысл. Алгебраическая геометрия занимает центральное место в самых разных областях современной математики и математической физики, и является наиболее эффективным и красивым инструментом для установления нетривиальных связей между кажущимися далёкими друг от друга явлениями. Настоящий курс является *геометрическим* введением в предмет и знакомит слушателей с фундаментальными геометрическими фигурами и конструкциями, а также с алгебраическими структурами, которые за ними стоят.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый курс бакалавриата (алгебра, анализ, геометрия, комбинаторика, топология).

ПРОГРАММА:

- Проективные пространства и проективные квадрики. Пространства квадрик. Прямые, коники, кривые Веронезе, рациональные кривые. Плоские кубические кривые, сложение точек на эллиптической кривой.
- Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй. Клетки Шуберта.
- Целые элементы в расширениях колец, строение конечно порождённых коммутативных алгебр над полем, базисы трансцендентности, теоремы Гильберта о нулях и базисе идеала.
- Геометрическая интерпретация коммутативной алгебры: спектры, топология Зарисского, геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.
- Алгебраические многообразия. Отделимость. Свойства проективных многообразий, собственность. Рациональные функции и рациональные морфизмы.
- Различные определения размерности. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Вычисление размерностей проективных многообразий.
- Линейные пространства на квадриках. Прямые на кубических поверхностях. Многообразия Чжоу.
- Векторные расслоения и пучки их сечений. Векторные расслоения на проективной прямой. Линейные системы, обратимые пучки и дивизоры, группа Пикара. Морфизмы определяемые линейными системами.
- Касательные и нормальные пространства и конусы, гладкость, раздутие. Точная последовательность Эйлера на проективных пространствах и грассманианах.

УЧЕБНИКИ:

- А. Л. Городенцев, Алгебра – 2.
  gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- Дж. Харрис, Алгебраическая геометрия. Начальный курс, «МЦНМО».
- И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии I, II, «Наука».
- Д.Мамфорд Красная книга о многообразиях и схемах. «МЦМНО», 2007.
- Ю.Манин Введение в теорию схем и квантовые группы. «МЦМНО», 2014.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «АЛГОРИТМЫ И АВТОМАТЫ»

ЛЕКТОР: Ю. В. Саватеев

НАЗВАНИЕ: Алгоритмы и автоматы

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Мы познакомимся с формализацией понятия «алгоритм», рассмотрим вычислительные модели и разберёмся с понятиями вычислимости и сложности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: не требуется.

ПРОГРАММА:

- Конечные автоматы.
- Регулярные выражения.
- Контекстно-свободные грамматики.
- Машины Тьюринга.
- Разрешимость и перечислимость множеств.
- Вычислимые функции.
- Сложность вычислений.
- Сложностные классы P, NP, PSPACE, L, NL.

УЧЕБНИКИ: M. Sipser. Introduction to the Theory of Computation.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ»

ЛЕКТОР: С. К. Ландо

НАЗВАНИЕ: Введение в алгебраическую топологию

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая топология — предмет, необходимый всякому, планирующему заниматься математикой или математической физикой. Наиболее бурный период развития алгебраической топологии пришелся на вторую половину XX века. В результате использование алгебро-топологического инструментария стало непременным атрибутом значительной части математических исследований. Эта область математики породила, например, такие направления как гомологическая алгебра и теория алгебр Хопфа. В курсе предлагается значительное количество задач на вычисление алгебро-топологических характеристик различных топологических пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

- Графы, поверхности, симплициальные комплексы, симплициальные отображения
- Пути, гомотопии путей, фундаментальная группа, накрытия, вычисление фундаментальной группы
- Цепные комплексы векторных пространств, гомологии с коэффициентами в поле, гомологии симплициальных комплексов, гомологии с коэффициентами в абелевой группе
- Когомологии симплициальных комплексов. Умножение в когомологиях
- Клеточные комплексы и клеточные гомологии. Многообразия. Двойственность Пуанкаре. Элементы теории Морса. Неравенства Морса

УЧЕБНИКИ:

- В. А. Васильев. Введение в топологию. М.: Фазис, 1997.
- В. В. Прасолов. Элементы теории гомологий. М.: МЦНМО, 2006.
- Р. М. Свитцер. Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. М.: Наука, 1985.
- A. Hatcher. Algebraic Topology.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ»

ЛЕКТОР: В. В. Лосяков

НАЗВАНИЕ: Введение в квантовую теорию

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: … У нас нет лучшего средства для описания элементарных частиц, чем квантовая теория поля. Квантовое поле — это ансамбль бесконечного числа взаимодействующих *гармонических осцилляторов*. Возбуждения этих осцилляторов отождествляются с частицами. Особая роль гармонических осцилляторов связана с аддитивностью их спектра. Если E_1 и E_2 — энергетические уровни, то E_1+E_2 — тоже энергетический уровень. В точности таких свойств мы ожидаем от элементарных частиц… Все это очень в духе XIX столетия, когда люди пытались строить механические модели всех явлений. Я не вижу в этом ничего плохого, поскольку любая нетривиальная идея в определенном смысле верна. Мусор прошлого часто оказывается сокровищем настоящего (и наоборот). По этой причине мы будем смело прибегать к различным аналогиям при обсуждении наших основных проблем.

Александр Поляков

Преподаватель студентам 1-го курса: «Будем изучать квантовую теорию поля?»
Студенты: «Да! Да! А что такое — квантовая?»
Преподаватель: «Вот с этого и начнём.»

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Классическая теория на примере электромагнитной волны. Электромагнитная волна — набор гармонических осцилляторов. Гамильтонов подход.

2. Gedanken эксперименты со светом — прохождение через поляризатор и фотоэффект. Вывод: наш мир не классический. Соотношения неопределенности.

2. Состояния физической системы в квантовой теории. Собственные состояния. Принцип суперпозиции. Вероятность перехода из одного состояния в другое (амплитуда перехода). Пространство состояний — гильбертово пространство.

3. Наблюдаемые в квантовой теории — операторы на гильбертовом пространстве. Действие оператора на собственные состояния. Требование самосопряженности оператора. Измерение наблюдаемой как задача на собственные значения. Определение среднего значения и дисперсии наблюдаемой.

4. Соотношение неопределенности и одновременная измеримость физических величин. Канонические коммутационные соотношения. Каноническое квантование в квантовой теории. Полный набор наблюдаемых.

5. Динамика в квантовой теории. Уравнение Шредингера. Гамильтониан как наблюдаемая, определяющая динамику в квантовой теории. Задача на собственные значения и собственные состояния гамильтониана как задача, решающая вопрос о динамике произвольного состояния в квантовой механике.

6. Квантование гармонического осциллятора. Операторы рождения и уничтожения. Энергетический спектр и собственные состояния.

7. Когерентные состояния. Когерентные состояния как минимизирующие соотношение неопределенности. Динамика когерентного состояния. Разложение единицы для когерентных состояний. Предельный переход к классической теории.

УЧЕБНИКИ:

- П. Дирак. Принципы квантовой механики, 1979.
- Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике.
- Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, 1980.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ И ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ»

ЛЕКТОР: А. Л. Городенцев

НАЗВАНИЕ: Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Язык категорий и функторов является универсальным средством для выражения алгебраических свойств объектов и отображений между ними в той или иной теории, к какой бы области математики она не относилась. Умение думать на этом языке позволяет находить простые концептуальные ответы на многие кажущиеся трудными вопросы и угадывать правильные постановки новых интересных задач. Целью курса является овладение категорными конструкциями на естественных содержательных примерах и приобретение навыков работы с основным для абелевых категорий вычислительным инструментом — комплексами и их гомологиями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии).

ПРОГРАММА:

- Категории, функторы, предпучки. Примеры: симплициальные множества, предпучки на топологических пространствах. Категория функторов, лемма Ионеды, представимые функторы и задание объектов универсальными свойствами. ([GM], [G], [M])
- Сопряжённые функторы. Пределы диаграмм. Фильтрующиеся категории. Примеры: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, неархимедово поплнение кольца $\mathbb{Z}$, локализация и некоммутативные дроби Оре. ([GM], [G], [M])
- Аддитивные, точные и абелевы категории. Диаграммный поиск, леммы о последовательностях. Прямые суммы и произведения. Инъективные, проективные, (ко)порждающие и (ко)компактные объекты. Характеризация категорий модулей, эквивалентность Мориты. Если позволит время: теорема о вложении. ([GM], [G], [M], [W])
- Категории комплексов, гомотопии и гомологии. Примеры: комплекс цепей симплициального множества, резольвента модуля, резольвенты мономиальных идеалов. Длинная точная последовательность гомологий. Конус морфизма. ([GM], [W])
- Спектральные последовательности точной пары, фильтрованного комплекса и свёртки бикомплекса. ([GM], [W])
- Ext и Tor на категории модулей. Инъективные и проективные резольвенты. Умножения и свёртки. Комплексы Кошуля, теорема Гильберта о сизигиях. ([B], [W])
- Бар-резольвента. Когомологии алгебр и групп. Классифицирующие пространства. ([B], [W])
- Если позволит время: триангулированные категории и производная категория от абелевой категории. ([GM])

УЧЕБНИКИ:

[B] Н. Бурбаки, «Гомологическая алгебра» (Алгебра X).

[GM] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, «Методы гомологической алгебры», часть I.

[G] А. Л. Городенцев, «Алгебра – 2».
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

[M] С. Маклейн, «Категории для работающего математика».

[W] C. A. Weibel, «An Introduction to Homological Algebra».

КОММЕНТАРИЙ: курс является новым, но некоторые его части представлены на
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/sha/1617/list.html
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/homalg/1415/list.html

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЧИСЕЛ»

ЛЕКТОР: В. З. Шарич

НАЗВАНИЕ: Введение в теорию чисел

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория чисел состоит из множества разнообразных вопросов и методов их исследования. Курс содержит две части. Первая часть посвящена подробному изучению элементарной теории чисел с использованием инструментов высшей математики. Вторая часть даст слушателям представление о возможных направлениях углубления и основных результатах в рамках этих направлений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

1. **Делимость и простые числа.** Евклидовы кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[i]$. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Основная теорема арифметики. p-показатели. Лемма об уточнении степени. Постулат Бертрана.

2. **Кольца вычетов по модулю.** Обратимые вычеты. Теорема Вильсона. Функция Эйлера и её свойства. Теорема Эйлера. Китайская теорема об остатках. Теорема Шевалле. Примитивные вычеты. Квадратичные вычеты (критерий Эйлера, квадратичный закон взаимности Гаусса).

3. **Цепные (непрерывные) дроби.** Свойства цепных дробей. Приближение иррациональных чисел рациональными. Цепные дроби квадратичных иррациональностей.

4. **Задачи на решётках.** Формула Пика. Теорема Блихфельда. Лемма Минковского. Теорема Кронекера. Равномерно распределённые последовательности. Теорема Ван-дер-Вардена.

5. **Многочлены над $\mathbb{Z}$.** Неприводимые многочлены. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна. Признак Дюма.

6. **Диофантовы уравнения.** Линейные диофантовы уравнения. Методы решения нелинейных диофантовых уравнений: метод остатков, метод разложений, метод оценок, метод спуска. Пифагоровы тройки. Уравнения Пелля. Суммы двух квадратов. Суммы четырёх квадратов.

7. **Основы алгебраической теории чисел.** Конечные расширения $\mathbb{Q}$. Лемма о простом расширении. Кольцо целых. Поле алгебраических чисел $\mathbb{A}$. Алгебраическая замкнутость $\mathbb{A}$. Теорема Лиувилля. Теорема Линдемана (б/д). Трансцендентность π и e.

8. **Основы аналитической теории чисел.** Гамма-функция Эйлера. Дзета-функция Римана. Ряды Дирихле, теорема Дирихле об арифметических прогрессиях (б/д). Теорема Чебышёва о распределении простых чисел.

9. **Основы комбинаторной теории чисел.** Теорема Коши – Дэвенпорта. Теорема Плюннеке – Ружа. Теорема Семереди (б/д). Теорема Грина – Тао (б/д).

10. **p-адические числа.** Неархимедовы нормы в $\mathbb{Q}$ и пополнения $\mathbb{Q}$ по ним. Кольцо $\mathbb{Z}_p$ и его свойства. Лемма Гензеля.

УЧЕБНИКИ:

[D] Г. Дэвенпорт, «Введение в теорию чисел».

[B] А. Бухштаб, «Теория чисел».

[H] Г. Хассе, «Лекции по теории чисел».

[V] И. М. Виноградов, «Основы теории чисел».

[U] В. В. Вавилов, А. В. Устинов «Многоугольники на решётках».

[W] Г. Вейль, «Введение в алгебраическую теорию чисел».

[N] М. Натансон, «Обратные задачи теории чисел».

[K] С. Б. Каток, «p-адический анализ в сравнении с вещественным».

[P] В. В. Прасолов, «Многочлены».

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

ЛЕКТОР: А. К. Погребков

НАЗВАНИЕ: Введение в функциональный анализ

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Функциональный анализ есть анализ в бесконечномерных линейных пространствах, снабжённых нормой, и теория операторов на таких пространствах. Его методы и результаты имеют многочисленные приложения в различных областях математики и математической физики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: обязательные курсы первого года бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Пространства Банаха и операторы на них, теорема Хана – Банаха.
2. Обобщенные функции умеренного роста, теорема Шварца.
3. Пространства Гильберта, ортонормированные базисы, тождество Парсеваля и теорема Риса – Фишера.
4. Ограниченные и неограниченные операторы в гильбертовом пространстве, замкнутые операторы, ортогональные проекторы, эрмитовы и самосопряжённые операторы.
5. Резольвента и спектр оператора.
6. Спектральная теорема для неограниченных самосопряжённых операторов.

УЧЕБНИКИ:

- М. Рид, Б. Саймон, «Методы современной математической физики», том 1, «Функциональный анализ»
- В. С. Владимиров, «Обобщенные функции в математической физике»
- И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, «Обобщенные функции и действия над ними», гл. I

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ – 2»

ЛЕКТОР: Е. Б. Фейгин

НАЗВАНИЕ: Группы и алгебры Ли – 2

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Мы начнём со структурной теории алгебр Ли и описания полупростых комплексных алгебр Ли в терминах корней, матриц Картана и диаграмм Дынкина. Затем мы обсудим комплексные полупростые группы Ли, геометрию обобщённых многообразий флагов и структуру представлений со страшим весом. Далее — вещественные группы Ли и симметрические пространства, соответствующие им алгебры Ли, симметрические пары и ограниченные системы корней, дифференциально-геометрические свойства симметрических пространств и связанные с ними канонические разложения вещественных групп. В заключение будут бесконечномерные представления вещественных групп и их приложения к специальным функциям.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курс «Группы и алгебры Ли» осеннего семестра 2018/19 уч. г.

ПРОГРАММА:

1. Нильпотентные, разрешимые и полупростые алгебры Ли. Структура и классификация простых комплексных алгебр Ли.

2. Полупростые группы Ли, борелевские и унипотентные подгруппы, многообразия флагов.

3. Конечномерные представлений полупростых комплексных алгебр и групп Ли.

4. Вещественные полупростые группы и симметрические пространства. Локальная структура. Разложения Ивасавы и Картана. Симметрические пространства компактного, некомпактного и евклидова типа. Двойственность. Ограниченные системы корней.

5. Бесконечномерные представления вещественных полупростых групп. Основная серия. Описание основной неунитарной серии группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Дискретная серия. Сплетающие операторы. Характеры.

6. Специальные функции, реализуемые как матричные элементы представлений подгрупп группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

УЧЕБНИКИ:

1. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.

2. С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства.

3. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщённые функции, вып. 5.)

4. A. Kirillov Jr., An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

ЛЕКТОР: О. В. Шварцман

НАЗВАНИЕ: Дифференциальная геометрия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс задуман как элементарное введение в Большую Дифференциальную Геометрию.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: обязательные курсы матфака по линейной алгебре, геометрии, анализу и топологии.

ПРОГРАММА:

1. Элементарная дифференциальная и риманова геометрия регулярных гиперповерхностей в евклидовом пространстве: параллельный перенос на гиперповерхности, отображение Гаусса, оператор формы, кривизна, геодезические.

2. Римановы многообразия: связность Леви – Чивита и параллелизм, ковариантное дифференцирование векторных и тензорных полей, экспоненциальное отображение и полнота, теорема Хопфа – Ринова, геодезические, геометрия компактной группы Ли.

3. Кривизна: тензор кривизны и гауссова кривизна, тензор Риччи, пространства постоянной кривизны.

4. Вариационная теория геодезических: первая и вторая вариация кривой, уравнение Якоби и сопряжённые точки, лемма Гаусса и полярные координаты, нормальная система координат.

5. Связности: связность в главном и в ассоциированном векторном расслоении, параллельный перенос и ковариантное дифференцирование сечений, форма кривизны, плоские связности.

УЧЕБНИКИ:

1. Р. Бишоп, Р. Критенден. Геометрия многообразий. М.: Мир, 1967.

2. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ М.: Наука, 1967.

3. Дж. Милнор. Теория Морса, М.: Мир, 1965.

4. Chavel. Modern Riemann Geometry. Academic Press.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АЛГЕБРЫ»

ЛЕКТОР: Л. Г. Рыбников

НАЗВАНИЕ: Дополнительные главы алгебры (Алгебра–4)

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс является непосредственным продолжением первых трёх семестров стандартного курса алгебры для бакалавриата и состоит из двух больших тем, по модулю на каждую: (1) элементарное введение в коммутативную алгебру, до теоремы Гильберта о нулях и дедекиндовых колец, но без гомологической алгебры; (2) Элементарное введение в некоммутативную алгебру — полупростые алгебры, до представлений симметрической группы и функторов Шура.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: три семестра стандартного курса алгебры для бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Нетеровы кольца и модули над ними. Теорема Гильберта о базисе. Теорема Гильберта об инвариантах. Лемма Нетер о нормализации. Теорема Гильберта о нулях. Кольца целых алгебраических чисел. Группа классов идеалов.

2. Модули над некоммутативными кольцами. Полупростые алгебры. Теорема плотности и ее следствия. Центральные простые алгебры. Групповая алгебра и модули над ней. Двойственность Фробениуса. Представления симметрической группы. Двойственность Шура–Вейля, функторы Шура.

УЧЕБНИКИ:

- С. Ленг, Алгебра.
- Б. Л. Ван дер Варден, Алгебра.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

ЛЕКТОР: А. Г. Семёнов

НАЗВАНИЕ: Квантовая теория поля

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: В настоящее время квантовая теория поля является основным средством описания явлений происходящих в микромире: взаимодействия элементарных частиц, строение адронов и т. п. Её методы широко используются и в других областях теоретической физики: конденсированное состояние вещества, статистическая механика, теория турбулентности и др. Помимо этого, квантовая теория поля служит важнейшим стимулом для развития множества современных математических исследований. Курс посвящён изучению основных идей и методов квантовой теории поля, а также обсуждению применения её подходов к различным областям современной теоретической и математической физики. Будет рассказано о квантовании скалярных и калибровочный теорий, методе функционального интегрирования, построении теории возмущений и диаграммах Фейнмана, $(1+1)$-мерных точно решаемых теориях, а так же о применении этих подходов в различных областях современной науки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Гамильтонова механика, Уравнения с частными производными, Группы и алгебры Ли, Классическая теория поля, Квантовая механика.

ПРОГРАММА:

- Теория поля, симметрии, физические реализации.
- Скалярное поле и его квантование (операторный подход).
- Наблюдаемые и S-матрица.
- Метод функционального интегрирования.
- Ряд теории возмущений и построение Фейнмановских диаграмм.
- Калибровочные поля и особенности их квантования.
- Абелевы и неабелевы теории, трюк Фаддеева – Попова.
- Фермионы в квантовой теории поля.
- Бесконечности в квантовой теории поля и методы работы с ними.
- Физические эффекты в КЭД и модельных системах.
- $(1+1)$-мерные системы.
- Применение методов квантовой теории поля в смежных областях.
- Интересные непертурбативные явления в модельных системах (при наличии времени).

УЧЕБНИКИ:

1. М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.
2. K. Huang. Quantum Field Theory. WILLEY-VCH, 2010.
3. A. M. Tsvelik. Quantum Filed Theory in Condensed Matter Physics. CUP, 2003.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

ЛЕКТОР: П. А. Сапонов

НАЗВАНИЕ: Классическая теория поля

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория поля изучает динамику систем с бесконечным (условно говоря, континуальным) числом степеней свободы. Группой симметрий пространства-времени в ней является группа Пуанкаре, играющая фундаментальную роль в специальной теории относительности. Как и «Гамильтонова механика», этот курс стоит одним из первых в ряду базовых курсов теоретической физики для 3-4 года бакалавриата и магистратуры, и служит пререквизитом для «Квантовой теории поля». Он настоятельно рекомендуется тем, кто учится или планирует учиться по направлению «Математика и математическая физика», но будет полезен всем не склонным пренебрегать физическими источниками идей и задач, движущих многими направлениями современной математики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: семестровый курс «Механика» для 2-го года бакалавриата. Желательно знакомство с основами теории групп и алгебр Ли, их представлений, векторным анализом (классические формулы Гаусса и Стокса), обобщёнными функциями и их применением в дифференциальных уравнениях, но краткое напоминание нужных фактов из этих областей будет дано на лекциях.

ПРОГРАММА:

1. Лагранжева формулировка классической механики (напоминание): принцип наименьшего действия, первая теорема Нётер, законы сохранения и группы симметрии механической системы.

2. Основы специальной теории относительности: принцип относительности Эйнштейна, пространство Минковского, группы и алгебры Лоренца и Пуанкаре. Свободная релятивистская частица. Действие и симметрии релятивистской струны.

3. Предельный переход от механической к полевой системе. Скалярное вещественное поле. Общее решение уравнения Клейна – Гордона.

4. Принцип наименьшего действия в полевых моделях, первая теорема Нётер, сохраняющиеся токи и заряды. Тензор энергии-импульса скалярного поля.

5. Свободное электромагнитное поле: 4-вектор потенциала и тензор напряжённости, уравнения Максвелла. Калибровочная инвариантность. Кулоновская калибровка. Плоские волны.

6. Релятивистская частица во внешнем электромагнитном поле: уравнения движения, сила Лоренца. Уравнения движения электромагнитного поля в присутствии зарядов и токов.

7. Закон сохранения энергии в электродинамике. Плотность энергии и плотности потока энергии электромагнитного поля, вектор Пойнтинга. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

8. Запаздывающая функция Грина волнового уравнения, потенциалы Лиенара – Вихерта точечного заряда и соответствующие напряжённости полей. Электрическое дипольное излучение, угловое и частотное распределение его интенсивности.

9. Самодействующие скалярные поля: волна-«кинк» в системе синус-Гордон, спонтанное нарушение симметрии, голдстоуновские поля, явление Хиггса.

10. Неабелевы калибровочные симметрии.

УЧЕБНИКИ:

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, «Курс теоретической физики. Теория поля», т.2, Москва, Наука, 1988.

2. Дж. Джексон, «Классическая электродинамика», Москва, Мир, 1965.
3. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, «Электродинамика. Фейнмановские лекции по физике», т.6, Москва, Мир, 1977.
4. В.С. Владимиров, «Обобщеные функции в математической физике», Москва, Наука, 1979.
5. В.С. Владимиров, «Уравнения математической физики», Москва, Наука, 1981.

КОММЕНТАРИЙ: Никаких специальных знаний по физике от слушателей курса не требуется. Записки лекций и листочки с задачами прошлых лет доступны на сайте https://math.hse.ru/field1718.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА»

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

ЛЕКТОР: А. С. Хорошкин

НАЗВАНИЕ: Введение в коммутативную алгебру

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Классическая алгебраическая геометрия изучает множества решений систем полиномиальных уравнений над алгебраически замкнутым полем. Рассмотрение полиномиальных уравнений с коэффициентами в более сложных кольцах, например, в кольце целых поля алгебраических чисел, приводит к современным задачам алгебраической геометрии и теории чисел. Коммутативная алгебра является основным алгебраическим инструментом для ответов на простейшие вопросы такого рода: является ли система уравнений конечно порождённой, имеет ли она решения в том или ином расширении, сколько неприводимых компонент имеет множество решений, каковы их размерности, гладки ли они и т. п.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: обязательные курсы первых трёх семестров бакалавриата, особенно: основы алгебры (группы, кольца, поля), линейная алгебра (включая тензорные произведения), базовый курс геометрии.

ПРОГРАММА:

- кольца и идеалы
- модули
- целая зависимость
- локализация
- примарное разложение
- дедекиндовы области
- теория размерности
- тензорное произведение
- длина

УЧЕБНИКИ:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra», CUP, 1995.
- М. Атья, И. Макдоналд, «Введение в коммутативную алгебру», М.: Мир, 1972.
- G. Kemper, «A course in commutative algebra», Springer, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry», NY: Springer-Verlag, 1999.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

ЛЕКТОР: А. В. Пенской

НАЗВАНИЕ: Комплексная геометрия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Комплексная геометрия изучает комплексно аналитические многообразия и голоморфные векторные расслоения. Будучи тесно связанной с дифференциальной и алгебраической геометрией, алгебраической топологией, геометрическим анализом и математической физикой, комплексная геометрия является красивой привлекательной и стремительно развивающейся областью в самом центре современной математики. Этот курс является фундаментом для дальнейшего самостоятельного изучения комплексной геометрии по предлагаемой ниже литературе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: 3-4 года бакалавриата (гладкие многообразия, дифференциальная геометрия, комплексный анализ одной переменной, алгебраическая топология).

ПРОГРАММА:

- Основы теории функций нескольких комплексных переменных
- Пучки и их когомологии
- Области в $\mathbb{C}^n$: дифференциальные формы, комплексные и эрмитовы структуры.
- Комплексные многообразия, голоморфные векторные расслоения, линейные расслоения и дивизоры, раздутия, элементы дифференциальной геометрии.
- Кэлеровы многообразия, теория Ходжа, теоремы Лефшеца.
- Дифференциальная геометрия: эрмитовы векторные расслоения, двойственность Серра, связности, кривизна, классы Чженя, голономия.
- Теоремы Хирцебруха – Римана – Роха и Кодаиры.
- Деформации комплексных структур.

УЧЕБНИКИ:

- D. Huybrechts, Complex Geometry — An Introduction
- П. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, в 2-х томах.
- К. Вуазен, Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия, в 2-х томах.
- А. Бессе, Многообразия Эйнштейна, в 2-х томах.
- Р. Уэллс, Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.

КОММЕНТАРИЙ: В качестве основного учебника планируется книга Хёйбрехтса, являющаяся расширенным изложением годового курса лекций, прочитанного в Университете Кёльна. Мы надеемся изучить её за один семестр при двух занятиях в неделю, предложив часть материала в виде задач для самостоятельного решения.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «КОНФОРМНЫЕ ТЕОРИИ»

ЛЕКТОР: М. А. Берштейн

НАЗВАНИЕ: Аффинные алгебры Ли и конформная теория поля.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс посвящен конформным теориям (точнее их киральным частям — вертексным алгебрам) с симметрией аффинной алгебры Ли и теориям которые получаются из них базовыми конструкциями. В основном мы будем обсуждать математические аспекты связанные с теорией представлений и геометрий. Курс предполагается относительно продвинутым.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: знакомство с теорией представлений простых алгебр Ли и базисные познания из двумерной конформной теории поля.

ПРОГРАММА:

1. Напоминание из структурной теории и теории представлений простых и аффинных алгебр Ли.
2. Теория Весса–Зумино, пространство конформных блоков.
3. Уравнения Книжника–Замолодчикова. Пределы уравнений КЗ.
4. Алгебра Верлинде, формула Верлинде. (*) Эквивариантная формула Верлинде.
5. Модули Вакимото, скринги, интегральные формулы для решений уравнений КЗ.
6. Квантовая гамильтонова редукция, квантовые W-алгебры.
7. Косет конструкция, квантовые W-алгебры.
8. Расширения произведения алгебр, примеры.
9. (*) Соответствие с квантовыми группами — теоремы Дринфельда–Коно и Каждана–Люстига.
10. (*) Геометрия расслоения конформных блоков — компактификация, характеристические классы.
11. (*) Уравнения КЗ на римановой поверхности.
12. (*) $N = 2$ суперсимметричены теории.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: И. В. Щуров

НАЗВАНИЕ: Машинное обучение

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: В 2018 году найдётся мало людей, которые бы не слышали о машинном обучении, но тех, кто понимает, что это такое, гораздо меньше. Машинное обучение используется в тех случаях, когда вам нужно научиться решать какой-то класс задач, для которого трудно написать явный алгоритм решения, но при этом можно найти множество примеров с правильными ответами. Так, невозможно представить себе написанный вручную алгоритм, который был бы способен отличить фотографию кошки от фотографии собаки, но если у вас есть достаточное количество фотографий тех и других, вы можете использовать машинное обучение, чтобы построить такой алгоритм автоматически.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Линейная алгебра, математический анализ (одномерный и многомерный), теория вероятностей, базовые навыки программирования.

ПРОГРАММА: В курсе мы будем обсуждать разные методы машинного обучения — начиная с линейных регрессий и деревьев решений и заканчивая современными нейросетевыми архитектурами. Мы начнём с теоретической основы каждого метода, посмотрим, как он работает на простых примерах, а затем перейдём к практической работе с реальными данными.

1. Обзор задач машинного обучения. Постановка задачи «обучения с учителем» (supervised learning). Метод k ближайших соседей. Проблема переобучения. Проклятие размерности.
2. Регрессии и классификаторы. Линейные модели. Регуляризация.
3. Методы оптимизации. Градиентный спуск и его модификации.
4. Решающие деревья. Бутстрап и бэггинг. Случайные леса. Градиентный бустинг.
5. Метод опорных векторов. Ядра. Двойственная задача.
6. Нейронные сети и глубокое обучение.
7. Задачи «обучения без учителя» (unsupervised learning): оценка плотности, кластеризация, снижение размерности. Semi-supervised learning.
8. Другие задачи машинного обучения.

УЧЕБНИКИ:

- Hastie T., Tibshirani R, Friedman J. The Elements of Statistical Learning (2nd edition). Springer, 2009.
- Murphy K. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press, 2012.
- Ian Goodfellow, Yoshua Bengio and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.

КОММЕНТАРИЙ: От слушателей требуется знание линейной алгебры, многомерного анализа и теории вероятностей — вас не должны пугать слова «гиперплоскость», «градиент», «плотность вероятности» и «ковариационная матрица». Мы также будем программировать — основным языком на курсе будет Python 3, если вы никогда не программировали на нём, будет очень желательно освоить его заранее — например, пройдя все темы на сайте pythontutor.ru.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА PYTHON»

ЛЕКТОРЫ: М. С. Густокашин, В. Е. Иваннокова

НАЗВАНИЕ: Основы программирования на Python

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс посвящён практике программирования на языке Python. Мы научимся базовому анализу и визуализации данных, основам разработки в нескольких областях, попробуем современные инструменты аналитика и разработчика. При решении задач изучим некоторый продвинутый синтаксис Python (модули и пакеты, декораторы, генераторы и т.д).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: готовность использовать математический аппарат линейной алгебры и статистики (впрочем, мы постараемся освежать в памяти все необходимые понятия).

ПРОГРАММА: Первый семестр проходит в формате blende learning по курсу «Основы программирования на Python» на Coursera (https://www.coursera.org/learn/python-osnovy-programmirovaniya). Вы овладеете базовыми навыками программирования на Python — умением читать код, использовать базовые конструкции языка: вызов и определение функций, списки и словари, циклы, условные выражения. Темы второго семестра: библиотеки pandas и numpy, WEB и HTTP, и др.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ»

ЛЕКТОР: А. А. Кириллов

НАЗВАНИЕ: Представления групп треугольных матриц над конечными полями

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория представлений — живая область современной математики, находящая применение почти во всех остальных областях. Это — математический аппарат для изучения и использования всех видов симметрии. Обычно симметрия объекта реализуется как действие на нем некоторой группы. Тип группы зависит от природы объекта: на конечных множествах действуют группы перестановок, на векторных пространствах — группы линейных операторов, на гильбертовом пространстве — унитарная группа, на многообразиях — группы диффеоморфизмов и т.п. Теория представлений для разных типов групп выглядит по-разному. Однако для широкого класса групп существует единый подход к изучению их представлений. Это метод орбит, который работает для всех групп, обладающих инфинитезимальным аналогом — так называемой алгеброй Ли. Идеология метода орбит состоит в том, что неприводимые унитарные представления группы G связаны с орбитами этой группы в пространстве, $\mathfrak{g}^*$, двойственном к её алгебре Ли. Хотя некоторые известные математики говорят о «необъяснимой эффективности» метода орбит, для математиков, знакомых с математической физикой, должно быть понятно, что этот метод — одна из математических инкарнаций понятия квантования. Темой моих размышлений последних лет было применение метода орбит к одному типу конечных групп, а именно групп треугольных матриц над конечным полем. Несмотря на кажущуюся простоту, эта задача до сих пор далека от полного решения. Однако уже полученные результаты и весьма разнообразные подходы — от анализа, геометрии и теории чисел до статистической механики и квантовой теории поля, позволяют надеяться на новые открытия даже начинающим математикам.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Анализ, линейная алгебра, комбинаторика, симплектическая геометрия, квантовая механика и «все, что понадобится впредь».

ПРОГРАММА: Краткое введение в группы и алгебры Ли, базисные факты теории представлений конечных групп, включая преобразование Фурье, анатомия треугольных групп малых размерностей, формула для характеров в терминах орбит.

УЧЕБНИКИ:

- А. А. Кириллов. Метод орбит и конечные группы. В сборнике «Студенческие чтения МК НМУ», выпуск 1, с. 37–73. МЦНМО, Москва, 2000
- A. A. Kirillov. Lectures on the orbit method. AMS, Providence, RI, 2004. Russian version: Новосибирск, Научная книга, 2001.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ»

ЛЕКТОР: С. М. Львовский

НАЗВАНИЕ: Римановы поверхности

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Слушатели смогут на (относительно) простом примере увидеть, как работают на практике некоторые важные понятия алгебраической и аналитической геометрии. Курс является естественным продолжением «Теории функций комплексного переменного» и (отчасти) «Анализа на многообразиях». Если последние были вам интересны, то «Римановы поверхности» — это курс для вас!

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первые два года бакалавриата. Особенно существенны теория функций комплексного переменного и введение в топологию.

ПРОГРАММА:

1. Определение римановой поверхности, простейшие примеры и свойства. [Lv].
2. Построение компактной римановой поверхности по алгебраическому уравнению. [Lv], [S].
3. Дифференциальные формы, интегралы и вычеты. [Lv].
4. Разветвленные накрытия и формула Римана–Гурвица. [Lv], [S].
5. Дивизоры, канонический класс. [G], [Lv].
6. Вычет Пуанкаре. Построение римановой поверхности по гладкой или нодальной плоской кривой.
7. Теорема Римана–Роха: эквивалентность различных формулировок, простейшие следствия. [L], [Lv].
8. Линейные расслоения и линейные системы. Примеры. [G].
9. Теоремы Римана–Роха, Римана о существовании и Абеля–Якоби для эллиптических кривых. [Lv].
10. Теорема Абеля–Якоби в общем случае: набросок доказательства и следствия.
11. Доказательство теоремы Римана–Роха по модулю теоремы Римана о существовании (по Андре Вейлю). [L].

УЧЕБНИКИ:

[G] R. Gunning. Lectures on Riemann surfaces. Princeton University Press, 1966.

[L] С. Ленг. Введение в алгебраические и абелевы функции. М.: Мир, 1976.

[Lv] С. М. Львовский. Принципы комплексного анализа. М.: МЦНМО, 2017.

[S] Дж. Спрингер. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: ОТ ФИЗИКИ К ЭКОНОМИКЕ»

ЛЕКТОР: С. М. Апенко

НАЗВАНИЕ: Сложные системы: от физики к экономике

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Сложными обычно называют системы, состоящие из большого числа элементов, сильно взаимодействующих между собой. Для сложных систем характерно появление совершенно новых свойств у системы как целого (emergent behavior, системные эффекты), несводимых к свойствам отдельных элементов. Для анализа таких систем часто бывает полезно использовать методы, успешно применяемые в статистической физике. В этом курсе мы обсудим основные идеи равновесной и неравновесной статистической физики и затем посмотрим, как они могут помочь при анализе некоторых социо-экономических явлений

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры и анализа), теория вероятностей, классическая механика.

ПРОГРАММА:

- Подход Гиббса к анализу термодинамического равновесия. Канонический и микроканонический ансамбли, энтропия.
- Идеальный и слабонеидеальные газы, вириальное разложение. Явление конденсации. Бозе – Эйнштейновская конденсация.
- Фазовые переходы, критические индексы. Модель Изинга, теория перколяции. Ренормгруппа Вильсона.
- Неравновесная статистическая механика. Уравнение Больцмана, H-теорема.
- Кинетические модели обмена богатством в эконофизике.
- Модель Изинга в случайном поле и ее применение для анализа социо-экономических явлений.
- Эволюционная теория игр и проблема кооперации в мультиагентных системах.

УЧЕБНИКИ:

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, части 1,2, Наука, 1976.
2. Г. Стенли. Фазовые переходы и критические явления. М. Мир, 1973.
3. П. Крапивский , С. Реднер , Э. Бен–Наим. Кинетический взгляд на статистическую физику. ISBN: 978-5-91522-296-9.
4. B. K. Chakrabarti, A. Chakraborti, S. R. Chakravarty, A. Chatterjee. Econophysics of income and wealth distributions, Cambridge, 2013.
5. M. A. Nowak. Evolutionary dynamics: exploring the equations of life, HUP, 2006

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ, СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ»

ЛЕКТОР: А. М. Поволоцкий

НАЗВАНИЕ: Случайные матрицы, случайные процессы и интегрируемые модели

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: В последние годы обнаружились неожиданные связи между, на первый взгляд, совершенно разными задачами математики и физики. С математической стороны это комбинаторные и вероятностные задачи о системах с большим числом степеней свободы: описание собственных значений матриц со случайными элементами, статистика случайных диаграмм Юнга, замощение различных областей плоскости доминошками или ромбиками, перечисление непересекающихся путей на решётках. С физической стороны это задачи о распространении границ разделов между средами, потоках взаимодействующих частиц, полимерах в неупорядоченных средах и т. д. Ключевое явление здесь — «интегрируемость», влекущая множество красивых и точных математических результатов, столь же общезначимых, как закон больших чисел или центральная предельная теорема. Рассматривая наши случайные системы издалека, мы обнаруживаем, что они имеют совершенно неслучайные предельные формы, случайные отклонения от которых описываются небольшим числом универсальных вероятностных распределений, совершенно не зависящих от деталей исходных систем. Слушатели познакомятся с очерченным кругом вопросов и узнают о последних достижениях в этой области.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, линейная алгебра, теория функций комплексного переменного, теория вероятности.

ПРОГРАММА:

1. Распределение собственных значений вигнеровских матриц. Полукруглый закон Вигнера. Метод моментов.
2. Распределение собственных значений коварицонных выборочных матриц. Закон Пастура – Марченко. Метод распределения Стильтьеса.
3. Инвариантные матричные ансамбли.
4. Основы теории детерминантных процессов.
5. Определители Фредгольма.
6. Метод ортогональных многочленов.
7. Универсальные распределения: процессы синус, Эйри и Бесселя. Распределения Трейси Уидома.
8. Построение корреляционных ядер в ортогональном и симплектическом ансамблях.
9. Теорема Карлина – Макгрегора. Построение расширенных процессов в задачах о непересекающихся броуновских мостах.
10. Одна задача с разными лицами: рост поверхностей, частицы с отталкиванием, задача о времени перколяции последнего достижения и задача о максимальной возрастающей подпоследовательности случайной перестановки. Соответсвие Робинсона – Шенстеда – Кнута.
11. Теорема Гесселя – Виенно о непересекающихся путях. Подсчет пар таблиц Юнга и процесс Шура.

УЧЕБНИКИ:

- М. Л. Мехта. Случайные матрицы.
- P. J. Forrester. Log-gases and random matrices.
- A. Guionnet, G. W. Anderson O. Zeitouni. An Introduction to Random Matrices.
- G. Blower. Random matrices: High dimensional phenomena.
- A. Borodin, V. Gorin. Lectures on integrable probability.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ»

ЛЕКТОР: М. Л. Бланк

НАЗВАНИЕ: Введение в теорию случайных процессов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс является продолжением стандартного курса по теории вероятностей и предназначен для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Уделяется особое внимание связи этой теории с фактами функционального анализа. Курс ориентирован на бакалавров 3–4 курса, магистрантов и аспирантов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: начальный курс теории вероятностей и полный курс анализа.

ПРОГРАММА:

- Понятие случайного процесса.
- Элементы случайного анализа.
- Корреляционная теория случайных процессов.
- Бесконечномерные распределения.
- Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.
- Винеровский и пуассоновский процессы.
- Стохастический интеграл. Формула Ито.
- (Суб/супер)мартингалы.
- Инфинитезимальный оператор полугруппы.
- Стохастическая устойчивость динамических систем.
- Большие уклонения в марковских процессах и хаотической динамике.
- Нелинейные марковские процессы.

УЧЕБНИКИ:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996
- N.V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.
- Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 2003
- А.Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ»

ЛЕКТОР: С. М. Хорошкин

НАЗВАНИЕ: Специальные функции

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Общедоступное введение в теорию специальных функций, к коим относятся гипергеометрическая функция Гаусса и функции, полученные преобразованиями вырожденных гипергеометрических функций (сферические функции, функции Бесселя, Эйри и др.). Вслед за элементарными функциями, эти функции входят в багаж знаний всякого образованного математика, физика, химика. В исследовании свойств специальных функций проявляется изящество методов, совмещающих средства действительного и комплексного анализа и теории дифференциальных уравнений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы анализа, линейной алгебры, ТФКП и обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРОГРАММА:

1. Классическая гипергеометрическая функция: интегральные представления, гипергеометрические тождества, соотношения смежности, ортогональные многочлены Якоби, гипергеометрическое уравнение по Риману.

2. Специальные функции, связанные с вырожденными гипергеометрическими функциями. Вырожденное гипергеометрическое уравнение. Асимптотические свойства решений. Функции Уиттекера, Лежандра, Эйри, Бесселя.

3. Приложения вырожденных гипергеометрических функций в анализе и в задачах математической физики.

4. (*) Гипергеометрические интегралы. Интегралы Сельберга. Решения уравнений Книжника – Замолодчикова по Варченко – Шехтману.

5. (*) Возникновение специальных функций в теории представлений групп Ли.

УЧЕБНИКИ:

1. Уиттекер, Ватсон Курс современного анализа. Том 2.

2. Аски, Рой, Эндрюс, Специальные функции.

3. Виленкин, Специальные функции и теория представлений.

4. Лебедев, Специальные функции и их приложения.

КОММЕНТАРИЙ: Звездочкой помечены дополнительные темы, часть из которых может быть опущена, если окажется мало времени.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: СТРОГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ»

ЛЕКТОР: С. Б. Шлосман

НАЗВАНИЕ: Статистическая механика: строгие результаты

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В курсе будут рассказываться строгие результаты статистической механики. Сначала я расскажу о цепях Маркова и об одномерных распределениях Гиббса — в качестве мотивации их определения. Потом речь пойдёт о многомерных гиббсовских полях. Будет рассказано о фазовых переходах первого и второго рода, о высокотемпературной единственности (и расстоянии Канторовича – Вассерштейна), о фазовых диаграммах и особенностях свободной энергии и о (случайных) поверхностях раздела фаз. Далее планируется рассказать о геометрических вариационных задачах статфизики и комбинаторики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, топологии) и начальные понятия теории вероятностей.

ПРОГРАММА:

- Цепи Маркова, переходные вероятности, теорема Перрона – Фробениуса. ([F])
- Спиновые системы, взаимодействие и гамильтонианы. Одномерные гиббсовские поля = цепи Маркова, трансфер-матрицы. [S]
- Марковские случайные поля и гиббсовские поля. Граничные условия, статсуммы, гиббсовские поля в конечном объёме. Уравнения Добрушина – Ланфорда – Рюэля (DLR). Большой канонический, канонический и малый канонический ансамбли. [S]
- Термодинамический предел. Свободная энергия. Теорема Ван Хова о независимости свободной энергии от граничных условий. [S]
- Фазовые переходы и множественность фаз при низких температурах. Контуры, метод Пайерлса. Положительность намагниченности при низких температурах. [S]
- Единственность фазы при высоких температурах. Расстояние Канторовича. Конструктивный критерий единственности. [FV]
- Поверхности раздела фаз. «Жёсткие» и «шершавые» поверхности. Пиннинг и энтропийное отталкивание. [FV]
- Системы с непрерывной симметрией. Теорема Мермина – Вагнера. Фазовый переход Костерлица – Таулесса – Березинского. [FV]
- Шахматные оценки, фазовые переходы в $O(n)$-моделях и нелинейных σ-моделях. [FV]

УЧЕБНИКИ:

[F] Феллер. Теория вероятностей.

[S] Синай. Теория фазовых переходов.

[LL] Ландау, Лифшиц. Статистическая физика.

[FV] Фридли, Веленик. Статистическая механика решётчатых систем.
http://www.unige.ch/math/folks/velenik/smbook/index.html

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «ТЕОРИЯ ПУЧКОВ»

ЛЕКТОР: Н. С. Маркарян

НАЗВАНИЕ: Теория пучков и гомологическая алгебра

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория пучков является стандартным инструментом изучения локальных объектов на различных многообразиях и получения с их помощью глобальных инвариантов рассматриваемых многообразий. Она является хорошей мотивацией для изучения гомологической алгебры. Мы познакомимся с основными понятиями теории пучков и их когомологий, и постараемся выучить все необходимые для этого определения и теоремы из гомологической алгебры.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: три семестра стандартных курсов алгебры, анализа, геометрии, топологии и спецкурс «Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру».

ПРОГРАММА:

- Пучки на топологических пространствах. Слои, этальное пространство предпучка, опучковывание. Прямой и обратный образ. Абелевы пучки.
- Комплексы и гомологии. Длинная точная последовательность и спектральная последовательность. Абелевы категории.
- Глобальные сечения, вялые пучки, резольвента Годемана. Когомологии пучков и гиперкогомологии комплексов пучков. Когомологии Чеха.
- Тонкие и мягкие пучки. Пучок дифференциальных форм на гладком многообразии: лемма Пуанкаре и теорема Де Рама.
- Высшие прямые образы пучков, спектральная последовательность Лере.
- Сечения и когомологии с компактными носителями.
- Когерентные пучки в алгебраической геометрии и их геометрические приложения.
- Категории, функторы, предпучки на категории, лемма Ионеды, сопряжённость и (ко) пределы.
- Топологии Гротендика, пучки на сайтах, теория спуска.

УЧЕБНИКИ:

- B. Fantechi et al, Fundamental algebraic geometry: Grothendieck’s EGA explained, Part 1.
- Р. Хартсхорн, Алгебраическая геометрия.
- B. Iversen, Cohomology of Sheaves, parts I-III.
- C. A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra.

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ»

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

РУКОВОДИТЕЛЬ: К. Г. Куюмжиян

НАЗВАНИЕ: Торические многообразия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Существует замечательный способ построения алгебраических многообразий по выпуклым многогранникам. Многообразия, которые возникают таким образом, называются торическими. Из самого простого многогранника — стандартного симплекса — при этом получается проективное пространство. Ключевые алгебро-геометрические свойства торических многообразий можно переговорить в терминах комбинаторно-геометрических свойств их многогранников, что делает большую часть алгебро-геометрических инвариантов торических многообразий явно вычислимыми, а сами торические многообразия — основным и незаменимым полигоном для проверки алгебро-геометрических гипотез, поиска примеров и контр-примеров, и т. д.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для понимания первой половины курса нужны основы выпуклой геометрии и коммутативной алгебры, а также понятия аффинного и проективного алгебраического многообразия. Для понимания второй половины курса желательно иметь представление о дивизорах и действии алгебраических алгебраических групп на алгебраических многообразиях. Тем не менее, никакого глубокого знания алгебраической геометрии от слушателей не предполагается, и все необходимые факты и определения будут напоминаться.

ПРОГРАММА: Аффинные и проективные торические многообразия, соответствие между конусами и орбитами, автоморфизмы аффинных торических многообразий и локально нильпотентные дифференцирования, разрешение особенностей в размерности 2 и связь с цепными дробями Хирцебруха. Дивизоры на торических многообразиях. Когомологии гладких торических многообразий.

УЧЕБНИКИ:

- D. Cox, J. Little, H. Schenck. Toric varieties. GTM 124, AMS, 2011.
- W. Fulton. Introduction to toric varieties. Ann of Mathematics Studies 131, Princeton University Press, 1993.
- В. И. Данилов. Геометрия торических многообразий. УМН 33:2(200), 1978, с. 85-–134.
- T. Oda. Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Results in Mathematics and Related Areas (3) 15, Springer-Verlag 1988.

КОММЕНТАРИЙ: Курс рассчитан на студентов начиная с третьего курса бакалавриата.

КУРС НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ «УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ»

ЛЕКТОР: В. В. Чепыжов

НАЗВАНИЕ: Уравнения в частных производных

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Всё, что мы видим, слышим, осязаем: колебания струны, волны на воде, звук, свет и другие электромагнитные колебания, распространение тепла, диффузия и прочее, описывается уравнениями в частных производных (УрЧП). Они начали изучаться в середине XVIII века в трудах Д'Аламбера, Эйлера, Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Фурье. К концу XIX века оформилась общая теория УрЧП, тесно связанная с другими разделами математики — функциональным анализом и теорией функций, топологией, алгеброй, комплексным анализом и др. УрЧП активно используют достижения всех этих наук и, в свою очередь, существенно влияют на их развитие, указывая ключевые направления дальнейшего исследования. Изучение конкретных уравнений математической физики часто приводило к открытию общих методов, применявшихся далее к широчайшему кругу задач. Так возникли метод Фурье, метод Рица, метод Галеркина, теория возмущений и др. Поразительная эффективность их применения, часто эмпирического и лишённого строгого математического обоснования, заставляла искать причины успеха и развивать фундаментальные математические теории происходящего. Так появились интеграл Фурье, обобщённые функции, гармонический анализ и многое другое.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: 4 семестра математического анализа, топология, динамические системы, обыкновенные дифференциальные уравнения.

ПРОГРАММА:

1. Некоторые важные физические задачи, приводящие к УрЧП.
2. Основные типы линейных УрЧП второго порядка.
3. Постановка основных краевых задач. Теорема Коши – Ковалевской.
4. Решение уравнения колебаний струны, формула Даламбера. Метод Фурье решения волновых уравнений. Обобщенные решения уравнения колебаний струны.
5. Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций этой задачи. Функция Грина задачи Штурма – Лиувилля.
6. Решение уравнение теплопроводности методом Фурье и с помощью преобразования Фурье. Формула Пуассона. Принцип максимума.
7. Уравнения и системы УрЧП, корректные по Петровскому.
8. Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Распространение волн.
9. Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
10. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума. Теорема Лиувилля.
11. Обобщенные производные и пространства Соболева. Неравенство Фридрихса. Вариационный метод решения эллиптических уравнений.

УЧЕБНИКИ:

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.
2. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988.
3. Ильин А. М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.
4. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.
5. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
6. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
7. Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под ред. А. С. Шамаева. – М.: БИНОМ, 2005.

КОММЕНТАРИЙ: Курс является переработанным курсом уравнений в частных производных, который читался на факультете математики проф. В. В. Чепыжовым в 2013–2016 гг.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА»

ЛЕКТОР: А. В. Колесников

НАЗВАНИЕ: Введение в финансовую математику

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс представляет собой введение в стохастический анализ с изложением базовых понятий и фактов финансовой математики (арбитраж, фундаментальные теоремы, теория Блэка – Шоулза). В курсе ставится задача освоения техники стохастического дифференцирования и теории мартингалов, с включением довольно сложных в техническом отношении, но важных для приложений результатов (уравнения Колмогорова, теорема Гирсанова). Поэтому, частично материал курса будет представлен обзорно. В курс также включен обзор других разделов теории вероятностей, имеющих финансовые приложения (распределения Леви, копулы и др.).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Теория меры, введение в теорию вероятностей.

ПРОГРАММА:

1. Моделирование финансовых активов. Базовые факты из теории вероятностей (обзорно). Моменты и кумулянты. Важные семейства распределений. Центральная предельная теорема. Безгранично делимые распределения. Теорема Леви – Хинчина. Корреляции и копулы. Основные модельные процессы. Винеровский процесс. Процессы Леви. Дробное броуновское движение.

2. Теория арбитража для дискретного времени. Опционы и другие ценные бумаги. Одношаговая биномиальная модель. Многошаговая биномиальная модель и формула CRR. Элементы теории мартингалов (дискретное время). Выпуклые множества. Теорема об отделимости. Первая фундаментальная теорема. Полнота рынка. Вторая фундаментальная теорема. Модель CRR и сходимость к модели Блэка – Шоулза. Мартингалы и моменты остановки.

3. Модели с непрерывным временем. Мартингалы. Марковские моменты, неравенства. Стохастический интеграл. Стохастический интеграл как мартингал. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Уравнение теплопроводности. Марковское свойство решений СДУ. Уравнение Колмогорова. Теорема Гирсанова. Модель Блэка – Шоулза.

УЧЕБНИКИ:

1. Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. 2003.

2. Bouchaud J.-P., Potters M., Theory of financial risk. CUP, 2000.

3. Bougerol F., Modèles stochastique et application a là finance.

4. Elliot R.J., Kopp P.E., Mathematics of financial markets, 2004.

КОММЕНТАРИЙ: Записки лекций доступны на
https://math.hse.ru/courses/185567209.html

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ФРОБЕНИУСОВЫ МНОГООБРАЗИЯ»

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

РУКОВОДИТЕЛЫ: С. М. Натанзон, П. И. Дунин–Барковский

НАЗВАНИЕ: Фробениусовы многообразия, когомологические теории поля и топологическая рекурсия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Многообразия Фробениуса – Дубровина связывают между собой теорию особенностей, интегрируемые системы, дифференциальную геометрию, топологические инварианты многообразий, операды, пространства модулей алгебраических кривых, зеркальную симметрию и прочее. Аналитические аспекты их теории были разработаны Дубровиным около 20 лет назад. Алгебраические и топологические аспекты описываются когомологическими теориями поля, созданными примерно тогда же Концевичем и Маниным. Сейчас эта наука стремительно развивается и играет важную роль во многих разделах математики и математической физики. Мы установим эквивалентность различных определений многообразий Фробениуса – Дубровина: через плоские деформации фробениусовых алгебр, ортогональные координатные системы, связки плоских кометрик, решения уравнений WDVV, циклические операды, когомологические теории поля и др. Будут разобраны нетривиальные примеры таких структур на пространствах версальных деформаций особенностей, пространствах орбит кокстеровских групп, пространствах Гурвица, в теории дифференциальных уравнений гидродинамического типа, теории топологических инвариантов Громова – Виттена и др. Наконец, мы обсудим топологическую рекурсию на спектральных кривых и её связи с упомянутыми объектами.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Основы дифференциальной геометрии.

ПРОГРАММА:

1. Фробениусовы алгебры.
2. Уравнение WDVV.
3. Фробениусовы многообразия.
4. Классификация двумерных и трехмерных фробениусовых многообразий.
5. Пространства Гурвица – Фробениуса.
6. Основы теории особенностей и связь с фробениусовыми многообразиями.
7. Когомологические теории поля и инварианты Громова – Виттена.
8. Интегрируемые системы, связанные с фробениусовыми многообразиями.
9. Топологическая рекурсия на спектральных кривых и ее связь с когомологическими теориями поля, формализм Гивенталя.

УЧЕБНИКИ:

1. B. Dubrovin, «Geometry of 2D topological field theories», Springer, Lect. Notes in Math., 1620 (1996), 120–348.
2. С. М. Натанзон, «Геометрия двумерных топологических теорий поля», М., МЦНМО, 1998.
3. Ю. И. Манин, «Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей», М., Факториал, 2002.
4. П. И. Дунин–Барковский, N. Orantin, S. Shadrin, L. Spitz «Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure», Comm. Math. Phys. 328 (2014), 669-–700.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ»

ЛЕКТОР: А. Г. Семёнов

НАЗВАНИЕ: Функциональный интеграл.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Одним из мощнейших методов современной теоретической физики является метод функционального интегрирования или, интегрирования по траекториям. Основы данного подхода были заложены Н. Винером ещё в начале XX века, однако наибольшую известность он получил после того, как Р. Фейнман применил данный подход в квантовой механике. В настоящее время функциональный интеграл нашел своё применение в теории случайных процессов, физике полимеров, квантовой и статистической механике и даже в финансовой математике. Несмотря на то, что в ряде случаев его применимость математически строго пока не доказана, данный метод позволяет с удивительным изяществом получать точные и приближённые решения различных интересных задач. Курс посвящён основам данного подхода. На примере стохастических дифференциальных уравнений будут рассказаны основные идеи данного подхода, а так же различные способы точного и приближённого вычисления функциональных интегралов. Далее, в зависимости от интересов аудитории, будет рассказано о различных применениях данного подхода, таких как физика полимеров, квантовая механика, финансовая математика и др. При наличии времени будет дан обзор более продвинутых сюжетов в данной области, в том числе, интегрирование по грассмановым переменным, вычисление функциональных детерминантов операторов и др.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы анализа, ТФКП, теории вероятностей, классической механики. Желательно, но не обязательно: классическая теория поля, статистическая механика, квантовая механика.

ПРОГРАММА:

1. Стохастические дифференциальные уравнения и случайные процессы.
2. Производящий функционал. Марковский (δ-коррелированный) и Гауссов случайные процессы.
3. Вероятность перехода и ее представление в виде функционального интеграла.
4. Вычисление простейших функциональных интегралов.
5. Броуновское движение и Винеровский интеграл.
6. Связь с уравнением Фоккера – Планка, исчислениями Ито и Стратоновича.
7. Гауссовы функциональные интегралы и теорема Гельфанда – Яглома.
8. Приближенное вычисление функционального интеграла.
9. Применение функционального интеграла в квантовой механике, физике полимеров и финансовой математике.
10. Дальнейшее развитие идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Chaichian M., Demichev A. Path integrals in physics. Vol. 1: Stochastic processes and quantum mechanics. 2001.

2. Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. 2004.
3. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. 1976.
4. Семенов А. Г. О случайном блуждании «пьяной компании». Теор. и математ. физика 2016 Т. 187 №. 2 с. 350–359.

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НА РЕШЁТКЕ»

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

РУКОВОДИТЕЛЬ: М. Б. Скопенков

НАЗВАНИЕ: Элементарная теория поля на решётке

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В этом курсе в элементарной игровой форме мы познакомимся с важными идеями теории поля, описывающей взаимодействия элементарных частиц. Это позволит понять не только физику, но и такие разделы математики, как дифференциальная геометрия и комплексный анализ. Для каждой изучаемой теории, каждого нового понятия мы постараемся показать, как они естественно возникают при решении практических задач и к каким задачам применяются дальше. Благодаря этому, большинство объектов становятся наглядными и простыми. Материал будет изучаться путём решения участниками задач с подробными указаниями и последующим разбором на занятии. Никаких предварительных познаний из физики не требуется: достаточно владения школьной математикой.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Игрушечная модель калибровочной теории на решётке: обмен товарами между городами. Связь с магнитным полем. Квантование: случайные курсы обмена товарами. Точное решение 1- и 2-мерной калибровочной теории на решётке. Численные эксперименты в размерности 3 и 4. Пример неабелевой калибровочной теории. Пленение кварков. Суть проблемы в теории Янга – Миллса (одной из «проблем тысячелетия»). Механизм Хиггса*. Разложения сильной и слабой связи*.

2. Математическая модель электрической цепи — простейшая модель теории поля на решётке. Существование и единственность потенциала в электрической цепи. Принцип максимума. Сохранение энергии. Вариационный принцип. Магнитное поле. Связь с игрушечной калибровочной теорией. Дискретные гармонические и дискретные аналитические функции. Электромагнитное поле*. Дискретные уравнения Максвелла*.

3. Шашки Фейнмана — простейшая модель электрона. Спин. Дискретное уравнение Дирака*. Сходимость шашек Фейнмана к теории Дирака*.

УЧЕБНИКИ:

1. J. Maldacena, The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, Europ. J. Phys. 37:1 (2016), https://arxiv.org/abs/1410.6753.

2. Р. Фейнман, КЭД. Странная теория света и вещества, Сер. Библиотечка «Квант», вып. 66.

3. Элементы математики в задачах: от кружков и олимпиад к профессии. Под общ. ред.: М. Б. Скопенков, А. Б. Скопенков, А. А. Заславский, М., МЦНМО, 2018.

КОММЕНТАРИЙ: Повтор курса, прочитанного в НМУ осенью 2017, см.
https://skopenkov.ru/courses/quarks-17.html.

Course descriptions in English

Listed in this section are the courses that will be given in English if required (e.g., if some students do not understand Russian). The courses given only in Russian were presented in the previous section, where the Russian descriptions for some courses listed below were also available (all these courses were marked there as «MAY BE GIVEN IN ENGLISH»).

PRIMARY LEVEL COURSE «ADVANCED LINEAR ALGEBRA»

LECTURER: K. G. Kuyumzhiyan

TITLE: Advanced Linear Algebra

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: This course is aimed to introduce main notions of Linear Algebra and their instances in other fields of mathematics.

PREREQUISITES: some notions from the Fall term course «Algebra and Arithmetics» will be used, especially, fields and groups.

SYLLABUS:

1. Matrices and Matrix Operations. Systems of Linear Equations. Cramer's Rule.
2. Vector spaces.
3. Linear Transformations.
4. Symmetry and Permutation Representations.
5. Bilinear Forms.
6. Linear Groups.
7. Basics of Representation Theory.

TEXTBOOKS:

- Artin, Michael; Algebra. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991. xviii + 618 pp.
- Vinberg, E. B.; A course in algebra. Translated from the 2001 Russian original by Alexander Retakh. Graduate Studies in Mathematics, 56. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. x + 511 pp
- Lang, Serge; Algebra. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi + 914 pp.
- Lang, Serge; Introduction to Linear Algebra. Second Edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1986.

PRIMARY LEVEL COURSE «ALGEBRA AND ARITHMETICS»

LECTURER: V. S. Zhgoon

TITLE: Algebra and Arithmetics

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: The aim of the course is to give introduction to basic notions of algebra and number theory. We plan to start from the algebraic properties of integer numbers, arithmetic of residues and basic properties of polynomials: such as Chinese remainder theorem, little Ferma's theorem, Wilson's lemma, quadratic residues. This will give us motivation for introducing more general notions in the group theory, commutative and non-commutative algebra. In particular we shall also study basic properties of finite groups such as cosets, normal, nilpotent and solvable subgroups, Sylow theorems, basic notions of commutative algebra: such as ideals, modules, maximal and prime ideals, localization, and basic notions of non-commutative algebra.

PREREQUISITES: The course tends to be elementary and very flexible, the program will depend on the listeners. All material required for understanding the course will be explained or reminded.

SYLLABUS:

1. Basic notions of integer numbers and residues
2. Chinese remainder theorem, little Ferma's theorem, Wilson's lemma.
3. Quadratic residues. Gauss reciprocity law.
4. Basic notions of group theory. Cosets, normal, nilpotent and solvable subgroups.
5. Group actions. Orbits, stabilizers, normalizers, conjugacy classes. Burside formula.
6. Sylow theorems*.
7. Basic notions of commutative algebra: rings, fields, algebras, ideals, modules.
8. Properties of finite fields.
9. Nilpotence, radicals, maximal and prime ideals, localization.
10. Basic notions of non-commutative algebra. Structure theory for non-commutative algebras.*

TEXTBOOKS:

1. E. B. Vinberg, A course in algebra, AMS No. 56, 2003.
2. K. Ireland, M. Rosen. A classical introduction to modern number theory, Springer Science & Business Media Vol. 84, 2013.
3. S. Lang, Algebra, Revised third edition, Graduate Texts in Mathematics 1.211, 2002.
4. D. S. Dummit, R. M. Foote. Abstract algebra, Vol. 3, Hoboken: Wiley, 2004.
5. R. B. Ash, Basic abstract algebra: For graduate students and advanced undergraduates, Courier Corporation, 2013.

COMMENTS: Marked by stars are more complicated topics that will be considered only if the time allows.

PRIMARY LEVEL COURSE «ALGEBRAIC GEOMETRY: A FIRST GEOMETRIC LOOK»

LECTURER: V. S. Zhgoon

TITLE: Algebraic Geometry: A First Geometric Look

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: Algebraic geometry studies geometric loci looking locally as a solution set for a system of polynomial equations on an affine space. It gives an explicit algebraic explanation for various geometric properties of figures, and in the same time, brings up a geometric intuition underlying abstract purely algebraic constructions. It plays an important role in many areas of mathematics and theoretical physics, and provides the most visual and elegant tools to express all aspects of the interaction between different branches of mathematical knowledge. The course gives the geometric flavor of the subject by presenting examples and applications of the ideas of algebraic geometry, as well as a first discussion of its technical tools.

PREREQUISITES: linear and multilinear algebra, basic ideas of polynomials, commutative rings and their ideals, tensor products, affine and projective spaces, topological spaces and their open, closed and compact subsets. No deep knowledge is assumed, all essential definitions and technique will be recalled during the course.

SYLLABUS:

- Projective spaces. Geometry of projective quadrics. Spaces of quadrics.
- Lines, conics. Rational curves and Veronese curves. Plane cubic curves. Additive law on the points of cubic curve.
- Grassmannians, Veronese's, and Segre's varieties. Examples of projective maps coming from tensor algebra.
- Integer elements in ring extensions, finitely generated algebras over a field, transcendence generators, Hilbert's theorems on basis and on the set of zeros.
- Affine Algebraic Geometry from the viewpoint of Commutative Algebra. Maximal spectrum, pullback morphisms, Zariski topology, geometry of ring homomorphisms.
- Agebraic manifolds, separateness. Irreducible decomposition. Projective manifolds, properness. Rational functions and maps.
- Dimension. Dimensions of subvarieties and fibers of regular maps. Dimensions of projective varieties.
- Linear spaces on quadrics. Lines on cubic surface. Chow varieties.
- Vector bundles and their sheaves of sections. Vector bundles on the projective line. Linear systems, invertible sheaves, and divisors. The Picard group.
- Tangent and normal spaces and cones, smoothness, blowup. The Euler exact sequence on a projective space and Grassmannian.

TEXTBOOKS:

- A. L. Gorodentsev, Algebra II. Textbook for Students of Mathematics. Springer, Ch. 1, 2, 10, 11, 12. Springer, 2017.
- A. L. Gorodentsev, Algebraic Geometry Start Up Course, MCCME.

- J. Harris, Algebraic Geometry. A First Course, Springer.
- D. Mumford, Red book of varieties and schemes, Springer LNM 1358.

COMMENTS: This course may be joint with the Math in Moscow program, see
http://www.mccme.ru/mathinmoscow/.
The materials for previous versions of this course are available at
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/1718/list.html

ADVANCED LEVEL COURSE «ALGEBRAIC TOPOLOGY»

LECTURER: A. G. Gorinov

TITLE: Algebraic Topology

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: One of the main goals of algebraic topology is to answer the question whether two given topological spaces are homeomorphic or homotopy equivalent. This question and several related ones arise not only in topology, but also in mathematical physics, algebra and geometry of any kind. Classical cohomology and generalisations such as K-theory etc are among the the main computational tools that in some cases, allow one to answer this question. This course explains systematically all these tools and their applications. It is intended as a continuation of the primary level course «Introduction to Algebraic Topology».

PREREQUISITES: basic algebra (groups, rings, fields), topology (topological and metric spaces, continuous maps, homotopy between continuous maps, coverings and the fundamental group) and category theory (categories, functors and natural transformations). However, all necessary notions will be recalled if required.

SYLLABUS:

- Introduction. How to calculate the homology groups of surfaces.
- Singular homology. Basic homological algebra: exact sequences, complexes, 5-lemma, homotopy.
- Homological algebra continued: acyclic models.
- First applications of acyclic models: homotopy invariance and excision for singular cohomology.
- CW-complexes, cellular homology and its particular cases and analogues. Simplicial complexes and simplicial homology. Smooth manifolds, Morse functions, handle decompositions and Morse homology.
- Homology and cohomology with coefficients. The universal coefficient theorems.
- The Künneth isomorphisms.
- Cup and cap products. Topological manifolds and the Poincaré duality.
- Lefschetz theorems. The contribution of a nondegenerate fixed point in the manifold case.
- Vector bundles; the glueing construction. Constructing new bundles using given bundles.
- Chern and Stiefel – Whitney classes. The addition formula.
- The Euler class. Applications of characteristic classes.

TEXTBOOKS:

- D. Fuchs, A. Fomenko. A Course in Homotopy Theory.
- A. Hatcher. Algebraic Topology.
  http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html
- A. Hatcher. Vector bundles and K-theory.
  http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html
- J. Milnor, J. Stasheff. Characteristic classes.

ADVANCED LEVEL COURSE «ANALYSIS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES»

LECTURER: A. A. Glutsyuk

TITLE: Analysis of several complex variables.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Analysis of several complex variables is a necessary pre-requisite to study many important domains of contemporary mathematics such as algebraic geometry, complex dynamics, singularity theory, differential equations etc. While holomorphic functions of several complex variables share many basic properties of functions of one variable, new phenomena of analytic extention occurs. For example, they can have neither isolated singularities, nor compact sets of singularities. The statement of Riemann Mapping Theorem in higher dimensions is strongly false. Namely, generic pair of two simply connected domains in complex space are not biholomorphically equivalent. Each complex space of dimension at least two contains a proper domain that is biholomorphically equivalent to the ambient space (Fatou – Bieberbach domain). Theory of holomorphic convexity and Stein manifolds together with basic sheave theory allows to prove important extension and approximation theorems. For example, each holomorphic function on a submanifold of a linear complex space is the restriction to if of a global holomorphic function on the ambient space. The GAGA principle in algebraic geometry says that every analytic object on a complex projective algebraic manifold is algebraic. The cours will cover the above mentioned topics, including basic analytic set theory, biholomorphic automorphisms and introduction to complex dynamics.

PREREQUISITES: basic calculus, complex analysis of one variable.

SYLLABUS:

1. Holomorphic functions of several complex variables. Cauchy – Riemann equations, Cauchy formula, Osgood Lemma, Taylor series.
2. Convergence of power series and convergence radius. Equivalent definition of holomorphic function.
3. Analytic extension. Erasing singularities. Hartogs Theorem.
4. Analytic sets: Implicit Function Theorem, Weierstrass Preparatory Theorem, factoriality of local ring of holomorphic functions, Weierstrass polynomials in two variables.
5. Analytic sets: decomposition into irreducible components, criterium of irreducibility, local covering presentation and Proper Mapping Theorem (without proof).
6. Introduction to complex algebraic geometry. Chow Theorem. Biholomorphic automorphisms of projective space.
7. Cauchy Inequality. Henri Cartan's theorem on automorphisms of bounded domains tangent to identity.
8. Generalized Maximum Principle and Schwarz Lemma. Automorphisms of ball and polydisk.
9. Introduction to complex dynamics: linearization theorems, polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$, Fatou-Bieberbach domains.
10. Domains of holomorphy. Holomorphic convexity. Levi convexity. Levi form. Oka's theorems on equivalence of these notions (with proofs of their simple parts). Pseudoconvexity. Riemann domains.
11. Dolbeault cohomology, $\bar{\partial}$-problem, $\bar{\partial}$-Poincare lemma.
12. Cousin problems. Sheaf cohomology. Analytic hypersurfaces in domains of holomorphy as zero loci of global holomorphic functions.

13. Coherent analytic sheaves. Stein manifolds. Extension and approximation theorems. Cartan A and B Theorems (without proof).

TEXTBOOKS:

- R. Gunning, H. Rossi, Analytic functions of several complex variables. AMS, 2009.
- B. Shabat. Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables. Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1992.
- Ph. Griffiths, J. Harris. Principles of algebraic geometry, vol. 1. J. Wiley & Sons, 1978.

ADVANCED LEVEL COURSE «ANALYTIC NUMBER THEORY»

LECTURER: A. B. Kalmynin

TITLE: Analytic Number Theory

LEARNING LOAD: Two semesters of 2018/19 A. Y., 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Analytic number theory is an area of number theory that uses analytic methods to study properties of the integers. No progress towards some famous problems such as Golbach's conjecture, Waring's problem or twin primes conjecture would be possible without the development of analytic methods such as bounds for exponential sums and theorems on the distribution of prime numbers. In this course we will study some results concerning averages of certain arithmetical functions (such as divisor function or Euler totient function), prime numbers in arithmetic progressions, properties of the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions and exponential sums. We will also see how to use these results to prove certain classical number-theoretical facts. Some of the applications will be straightforward, but we also will learn many unexpected ones. For example, we will deduce Linnik's theorem on seven cubes from Siegel-Walfisz theorem.

PREREQUISITES: Complex analysis (basic properties of holomorphic functions, Cauchy's integral formula, Maximum modulus principle, Weierstrass factorization theorem), Analysis (O-notation, Lebesgue –Stieltjes integration), Algebra (fundamental theorem of arithmetic)

SYLLABUS:

Fall term:

1. Arithmetical functions and their averages: an elementary approach. Convolutions of arithmetical functions, Möbius inversion formula, Dirichlet divisor problem, Gauss circle problem, normal and maximal orders of arithmetical functions.
2. Contour integration method. Riemann zeta function, its basic properties and functional equation. Phragmen – Lindelof principle. Prime number theorem, explicit formula, zero-free region for the zeta function. Hardy – Voronoi summation formula.
3. Dirichlet characters, Dirichlet L-functions, Polya – Vinogradov inequality, Page's theorem, Landau – Siegel zeros, Siegel – Walfisz theorem on primes in arithmetic progressions, Linnik's seven cubes theorem.
4. Basic sieve methods, smooth numbers, Selberg sieve, applications.

Spring term:

1. The theorem on approximation of a trigonometric sum by a shorter one. Approximate functional equation for the Riemann zeta function. Theory of exponent pairs. Zero density estimates. Primes in short intervals.
2. Estimates for the Weyl sums, equidistribution modulo 1, zero-free regions for zeta function. Waring's problem.
3. Large sieve method and its applications: Linnik's theorem on the least quadratic nonresidue, Brun – Titchmarsh inequality, Galois group of a random polynomial, Selberg's conditional theorem on primes in very short intervals.

TEXTBOOKS:

- A. A. Karatsuba, «Basic analytic number theory».
- H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, «Multiplicative number theory I: Classical theory».
- A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, «The Riemann zeta-function».
- T. Tao, «Analytic prime number theory» https://terrytao.wordpress.com/category/teaching/254a-analytic-prime-number-theory/.

ADVANCED LEVEL COURSE «ARITHMETICAL DYNAMICS»

LECTURER: Charles Favre

TITLE: Arithmetical Dynamics

LEARNING LOAD:

DESCRIPTION: , module 1 (September–October), 1 class per week, 2 credits. classes per week, 5 credits per semester. These lectures are aimed at presenting some aspects of the dynamics of polynomials in one variable with coefficients in a number field. We shall discuss two deep conjectures that have been proved to be very influential in the development of this field: the uniform boundedness conjecture by Silverman, and the dynamical Andre–Oort conjecture Baker and DeMarco. It will be the opportunity to present various tools coming from arithmetic geometry or from complex dynamics that are used to approach these challenging problems.

PREREQUISITES: elementary notions in non-Archimedean analysis in one variable are welcome (e.g. A. Robert «A Course in *p*-adic Analysis», chapters 1, 2, and Sections 6.1, 6.2).

SYLLABUS:

- The uniform boundedness conjecture
- Fatou/Julia theory for complex polynomials
- Canonical heights for complex polynomials
- Non-archimedean polynomial dynamics
- The dynamical Andre–Oort conjecture
- Equidistribution of points of small heights

PRIMARY LEVEL COURSE «BASICS OF FUNCTIONAL ANALYSIS»

LECTURER: M. Z. Rovinsky

TITLE: Basics of functional analysis

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: As its name suggests, Functional analysis originates from the study of functions. The fundamental idea here is to interpret functions as points in an appropriate vector space and to study analytic problems in terms of mappings between such spaces. However, as soon as considered vector spaces are infinite-dimensional, nontrivial results arise only after vector spaces are provided with a nontrivial topology and the mappings are supposed to be continuous. This course proposes an introduction to methods and basic results of Functional analysis, both abstract and related to various spaces of functions.

PREREQUISITES: Acquaintance with Linear Algebra and some basic Analysis is required. Some knowledge of measure theory would be helpful.

SYLLABUS:

- Normed fields and vector spaces
- Banach spaces and their examples
- Hahn–Banach theorem (and extension of bounded linear functionals)
- Uniform boundedness principle
- Bounded inverse theorem, open mapping theorem, closed graph theorem
- Hilbert spaces
- Spectral theory
- Fourier transform on commutative locally compact groups

TEXTBOOKS:

1. Erwin Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1978.
2. Dirk Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag, 2005.
3. A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1953.

COMMENTS: Marked by stars are more complicated topics that will be considered only if the time allows.

PRIMARY LEVEL COURSE «CALCULUS OF VARIATIONS»

LECTURER: M. Mariani

TITLE: Calculus of Variations

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: The lectures provide an introduction to Calculus of Variations, addressing both classical subjects (action functionals, isoperimetric problems), and modern approaches (direct methods, applications to physics and optimal control). The student will be required to understand the theoretical aspects of the theory, as well as to apply it to specific cases.

PREREQUISITES: Mathematical Analysis, Elementary general Topology, Basic Functional Analysis.

SYLLABUS:

1. Historical model problems and preliminaries: convex analysis, Sobolev spaces.
2. Classical methods: Euler-Lagrange equations, optimal control, the Hamiltonian approach, viscosity solutions, applications.
3. Direct methods: basic theory, elliptic problems (existence, uniqueness, regularity), Euler-Lagrange revisited, relaxation of integral functionals, applications.

TEXTBOOKS:

- Bernard Dacorogna; Introduction to the calculus of variations; Imperial College Press, 3rd ed (2014).
- Bruce van Brunt; The Calculus of Variations; Springer (2004).
- Israel M. Gelfand, Sergey V. Fomin; Calculus of Variations; Dover (1963) [Selected topics].
- Michael Struwe; Variational Methods; Springer (2008) [Selected topics].
- Mariano Giaquinta, Stefan Hildebrandt; Calculus of Variations I; Springer (2004) [Selected topics].

COMMENTS: Depending on the number and interests of students, one of the following topic can be addressed in some additional lectures: optimal control, minimal surfaces, homogenization.

PRIMARY LEVEL COURSE «CLASSICAL ANALYSIS AND ODE»

LECTURER: T. Takebe

TITLE: Classical Analysis and ODE

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: The calculus (differentiation and integration) is one of the most fundamental tools in mathematics. In this course, after reviewing definitions of differentiation and integration of functions of several variables, the properties of such functions will be discussed together with basics on ordinary differential equations (ODE).

PREREQUISITES: Basic calculus (functions of one variable and elementary properties of real numbers).

SYLLABUS:

- Review of calculus of functions in one variable.
- Differentiation of functions of many variables: partial derivatives and total differential.
- Inverse function theorem and implicit function theorem.
- Integration along curves.
- Integration of functions of many variables.
- Ordinary differential equations: basic examples and various methods for solving them.
- Fundamental theorems on ordinary differential equations: existence and uniqueness of solutions.

TEXTBOOKS:

- W. Rudin. Principles of mathematical analysis.
- J. Munkres, Analysis on Manifolds.
- E. Hairer, G. Wanner. Analysis by its history.

COMMENTS: The final score will be based on the results of quiz during the course and the final exam.

PRIMARY LEVEL COURSE «COMMUTATIVE ALGEBRA»

LECTURER: A. S. Khoroshkin

TITLE: Introduction to Commutative Algebra

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: At its most basic level, algebraic geometry is the study of the geometry of solution sets of polynomial systems of equations. Classically, the coefficients of the polynomial equations are assumed to lie in an algebraically closed field. Considering more general coefficient rings, in particular rings of integers in number fields, one arrives at modern algebraic geometry and algebraic number theory. Commutative algebra provides the tools for answering basic questions about solutions sets of polynomial systems, such as finite generation of the system, existence of solutions in some extension of the coefficient ring, dimension and irreducible components, and smoothness and singularities.

PREREQUISITES: Basic courses given at the faculty of mathematics for the first 3 semesters, including (a) basic algebra (groups, rings, fields), (b) Linear algebra (tensor products), (3) Basic geometry

SYLLABUS:

- Rings and ideals
- Modules
- Integral dependence
- Localization
- Primary decomposition
- Dedekind domains
- Dimension theory
- Tensor products
- Length

TEXTBOOKS:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra», CUP, 1995.
- M. Atiyah, «Introduction to commutative algebra.», Westview press, 1994. Russian translation: М. Атья, И. Макдоналд, «Введение в коммутативную алгебру», М.: Мир, 1972.
- G. Kemper, «A course in commutative algebra», Springer, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry», NY: Springer-Verlag, 1999.

ADVANCED LEVEL COURSE «DIFFERENTIAL GEOMETRY»

LECTURER: O. V. Schwarzman

TITLE: Differential geometry

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: The course will serve as an introductory guide to basic topics of Differential and Riemann geometry: the theory of Riemannian and Loretzian manifolds, the theory of affine connections on manifolds, The Gauss – Bonne – Chern – Weil theory.

PREREQUISITES: курс рассчитан на студентов-математиков старших курсов бакалавриата, а также магистрантов и аспирантов.

SYLLABUS:

- **Differential and Riemann geometry of smooth hypersurfaces in the Euclidean space.**
  - Parallel transport. The Gauss Map. The Shape operator.
  - The metric connection. Covariant derivatives. Parallel transport.
  - Completeness and geodesics. The Exponential Map. The Hopf – Rinow theorem.
  - Curvature. Geodesics.
- **Riemann manifolds:** Riemannian metric and Levi – Chivita connection.
- **Curvature.**
  - Calculations with curvature tensor. The Gauss curvature.
  - The Ricci tensor.
  - Spaces of constant curvature.
- **Variational theory of geodesics.**
  - First and second variation of arc length.
  - Jacobi's equation and conjugate points.
  - The Gauss lemma and polar coordinates.
- **Connections in vector bundles.**
  - Parallel transport and Covariant derivatives.
  - Introduction to the Chern – Weil theory.

TEXTBOOKS:

1. Gallot, Hulin, Lafontaine, Riemannian Geometry.
2. Milnor, Morse Theory.

ADVANCED LEVEL COURSE «DIFFERENTIAL TOPOLOGY»

LECTURER: A. A. Gaifullin

TITLE: Differential topology

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: We plan to discuss two topics, which are central in topology of smooth manifolds, the *h*-cobordism theorem and theory of characteristic classes. The *h*-cobordism theorem proved by S. Smale in 1962 is the main (and almost the only) tool for proving that two smooth manifolds (of dimension ≥ 5) are diffeomorphic. In particular, this theorem implies the high-dimensional Poincaré conjecture (for manifolds of dimensions ≥ 5). Characteristic classes, in particular, Pontryagin classes are very natural invariants of smooth manifolds. Computation of characteristic classes can help one to distinguish between non-diffeomorphic manifolds. We plan to finish the course with the theorem by J. Milnor on non-trivial smooth structures on the 7-dimensional sphere. This theorem is based both on methods of Morse theory and theory of characteristic classes.

PREREQUISITES: Differential and algebraic topology, Morse theory, theory of characteristic classes.

SYLLABUS:

1. De Rham cohomology. Singular homology. Pairing between homology and cohomology.
2. Multiplication in cohomology and intersection of cycles. Poincaré duality.
3. Morse functions. Cobordisms corresponding to critical points. Morse inequalities. Lefschetz theorem on hyperplane sections.
4. Smale's *h*-cobordism theorem. High-dimensional Poincaré conjecture.
5. Principal bundles and their characteristic classes. Chern – Weil theory. Chern classes and Pontryagin classes.
6. Integral Chern classes and Pontryagin classes.
7. Smooth structures on the 7-dimensional sphere.

TEXTBOOKS:

1. R. Bott, L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology.
2. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, Modern Geometry — Methods and Applications. Part II: The Geometry and Topology of Manifolds.
3. J. Milnor, Morse theory.
4. J. Milnor, Lectures on the *h*-cobordism theorem.
5. J. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Annals of Mathematics, 64 (1956), 399–405.
6. J. Milnor, J. Stasheff, Characteristic classes.
7. S. P. Novikov, I. A. Taimanov, Modern Geometric Structures and Fields.

PRIMARY LEVEL COURSE «DYNAMICS AND ERGODIC THEORY»

LECTURERS: A. S. Skripchenko, A. V. Zorich

TITLE: Dynamical Systems in Modern Geometry, Topology and Physics.

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: Dynamical systems in our course will be presented mainly not as an independent branch of mathematics but as a very powerful tool that can be applied in geometry, topology, probability, analysis, number theory and physics. We consciously decided to sacrifice some classical chapters of ergodic theory and to introduce the most important dynamical notions and ideas in the geometric and topological context already intuitively familiar to our audience. As a compensation, we will show applications of dynamics to important problems in other mathematical disciplines. We hope to arrive at the end of the course to the most recent advances in dynamics and geometry and to present (at least informally) some of results of A. Avila, A. Eskin, M. Kontsevich, M. Mirzakhani, G. Margulis.

PREREQUISITES: basic differential geometry, topology and measure theory.

SYLLABUS:

- Rotation of the circle and continued fractions.
- Introduction to hyperbolic geometry. Möbius transformations. Fuchsian groups.
- Geodesics on surfaces of negative curvature. The geodesic flow and its properties.
- Geodesic flow on modular curve as a continued fraction map.
- Teichmüller space. Teichmüller geodesic flow.
- Interval exchange transformations (IET) as natural generalizations of continued fractions.
- IET as the first return maps on transversal for measured foliations on oriented surface. Poincaré recurrence theorem.
- Key ergodic properties: minimality, ergodicity, number of invariant measures (illustrated by IET).
- Multiplicative ergodic theorem. Topological interpretation of Lyapunov exponents.
- Anosov and Pseudoanosov diffeomorphisms of surfaces. Introduction to hyperbolic dynamics (Markov partitions, invariant measures etc).

TEXTBOOKS:

- F. Dal'bo, Geodesic and Horocyclic trajectories, Springer Urtext (2011).
- S. Katok, Fuchsian groups, University of Chicago Press, 1992 (на русском: М.: Факториал, 2002)
- W. Thurston, Geometry and topology of three-manifolds, Princeton University Press, 1997 (на русском: М.: МЦНМО, 2001)
- Ya. Sinai, Introduction to ergodic theory Princeton University Press, 1977 (на русском: изд. Ереванского унив., 1973)
- M. Viana, Ergodic Theory of Interval Exchange Maps, Revista Mathematica Com- plutense 19:1 (2006) 7—100.

- J.-C. Yoccoz, Interval exchange maps and translation surfaces, http://www.college-de-france.fr/media/jean-christophe-yoccoz/UPL15305_PisaLecturesJCY2007.pdf
- G. Margulis, Number theory and homogeneous dynamics, http://jointmathematicsmeetings.org/meetings/national/jmm/margulis_colloq_lect_08.pdf
- D. Ruelle, Chaotic Evolution and Strange Attractors, CUP, 1989.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «FROBENIUS MANIFOLDS»

ADVISORS: S. M. Natanzon, P. I. Dunin–Barkowski

TITLE: Frobenius Manifolds, Cohomological Field Theories and Topological Recursion

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: The theory of Frobenius – Dubrovin manifolds connects the theory of singularities, integrable systems, differential geometry, topological invariants of manifolds, operads, moduli spaces of algebraic curves, mirror symmetry etc. Analytical aspects of the theory were developed by Dubrovin about 20 years ago. Algebraic and topological aspects are described by cohomological field theories discovered by Kontsevich and Manin. After that the theory of Frobenius – Dubrovin sees active development and plays an important role in many branches of mathematics and mathematical physics. In the course, we will discuss the equvalence of various seemingly different definitions of Frobenius – Dubrovin manifolds: flat deformations of Frobenius algebras, orthogonal coordinate systems, pencils of flat cometrics, solutions of WDVV equations, cyclic operads, cohomological field theories and so on, and consider various nontrivial examples of such manifolds arising naturally on spaces of versal deformations of singularities, spaces of orbits of Coxeter groups, Hurwitz spaces, in the theory of differential equations of the hydrodynamic type, theory of Gromov – Witten invariants, etc. In addition, we will discuss the theory of spectral curve topological recursion, and its connections to some of the aforementioned objects and theories.

PREREQUISITES: Basics of differential geometry.

SYLLABUS:

1. Frobenius algebras.
2. WDVV equation.
3. Frobenius manifolds.
4. Classification of 2D and 3D Frobenius manifolds.
5. Hurwitz – Frobenius spaces.
6. Basics of singularity theory and its connection to the theory of Frobenius manifolds.
7. Cohomological field theories and Gromov – Witten invariants.
8. Integrable systems related to Frobenius manifolds.
9. Spectral curve topological recursion and its connection to cohomological field theories; Givental's formalism.

TEXTBOOKS:

1. B. Dubrovin, «Geometry of 2D topological field theories», Springer, Lect. Notes in Math., 1620 (1996), 120–348.
2. S. M. Natanzon, «Geometry of two-dimensional topological field theories».
3. Yu. I. Manin, «Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces», AMS Colloquium Publications, 1999.
4. P. I. Dunin–Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, L. Spitz «Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure», Comm. Math. Phys. 328 (2014), 669–-700.

ADVANCED LEVEL COURSE «FUNCTIONAL ANALYSIS»

LECTURER: A. Yu. Pirkovskii

TITLE: Functional Analysis

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: Functional analysis studies normed and topological infinite-dimensional vector spaces and representations of algebraic structures on them. It is commonly used in differential equations, analytical and differential geometry, representation theory and quantum physics. The classical areas are the spectral theory of linear operators, distribution theory, operator algebra theory etc. Among relatively new are the noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (AKA «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. We plan to discuss selected topics from the syllabus below. The choice will depend on the material of preceding course «Introduction to Functional Analysis» in order to minimize intersections.

PREREQUISITES: the course «Introduction to Functional Analysis», Fall 2018.

SYLLABUS:

Duality for Banach spaces. Dual spaces and dual operators. The duals of classical Banach spaces. The canonical embedding into the bidual. Reflexivity. Annihilators, preannihilators. The duals of subspaces and quotients. Relations between properties of operators and their duals.

Elementary spectral theory. The spectrum of an algebra element. Banach algebras. The nonemptiness and the compactness of the spectrum. The Gelfand – Mazur Theorem. Spectral radius. The point spectrum, the continuous spectrum, and the residual spectrum of a linear operator. Spectra and duality. Calculations for classical operators.

Compact and Fredholm operators. Basic properties, examples. The Fredholm index. The Riesz – Schauder theory. The Fredholm Alternative. Properties of the spectrum of a compact operator. Applications to integral equations. The Nikolski – Atkinson criterion. The Calkin algebra. The continuity of the index. The stability of the index under compact perturbations. The essential spectrum. Applications to Toeplitz operators.

Compact operators on a Hilbert space. The Hilbert – Schmidt theorem on the diagonalization of compact selfadjoint operators. The Schmidt theorem on the structure of compact operators. Applications to the Sturm – Liouville problem. Hilbert – Schmidt operators and nuclear operators. The trace.

Topological vector spaces. Locally convex spaces. Examples. Continuous linear operators. Normability and metrizability criteria. Dual pairs and weak topologies. The bipolar theorem and corollaries. The Banach – Alaoglu theorem. Weak topologies and compact operators.

Distributions. Operations on distributions. The sheaf of distributions. The support. Compactly supported distributions and tempered distributions. Tensor product and convolution of distributions. Structure theorems for distributions. The Fourier transform of tempered distributions.

Commutative Banach algebras. Maximal ideals and characters of a commutative Banach algebra. The closedness of maximal ideals. The Gelfand spectrum. The Gelfand transform. C^*-algebras. The Gelfand – Naimark theorem on commutative C^*-algebras.

The Spectral Theorem. The continuous and Borel functional calculi for a selfadjoint operator. Positive operators. The polar decomposition. Spectral measures and representations of algebras of continuous functions. The Spectral Theorem and the functional model for a selfadjoint operator. Multiplicity theory and classification of selfadjoint operators.

TEXTBOOKS:

1. A. Ya. Helemskii, Lectures and exercises on functional analysis. AMS, 2006.
2. V. I. Bogachev, O. G. Smolyanov, Real and functional analysis (in Russian), R&CD, 2009.
3. J. B. Conway. A course in functional analysis, Springer, 1990.
4. G. J. Murphy. C^*-algebras and operator theory, Academic Press, 1990.

PRIMARY LEVEL COURSE «GALOIS THEORY»

LECTURER: C. Brav

TITLE: Galois theory

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: Galois theory is the study of roots of polynomials and their symmetries in terms of Galois groups. As the algebraic counterpart of the fundamental group of topology, the Galois group is an essential object in algebraic geometry and number theory.

PREREQUISITES: Basic algebra: groups, rings, linear algebra over a field.

SYLLABUS:

- Review of polynomial rings and more general principal ideal domains.
- Extensions of fields, algebraic and transcendental.
- Splitting fields of polynomials and Galois groups.
- The fundamental theorem of Galois theory.
- Computing Galois groups.
- Applications.

TEXTBOOKS: James Milne. Fields and Galois Theory,
http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/FT.pdf

PRIMARY LEVEL COURSE «GEOMETRY AND TOPOLOGY»

LECTURER: V. A. Kiritchenko

TITLE: Geometry and Topology

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: The course covers basic notions of topology such as metric spaces, smooth manifolds and fundamental group. The main focus is on concrete examples such as Riemann surfaces, projective spaces, Grassmannians. The course can serve as an introduction to more advanced geometry and topology courses.

PREREQUISITES: Basic Abstract Algebra (groups, rings and vector spaces)

SYLLABUS:

- Reminder on set theory: countable and uncountable sets, Cantor set, axiom of choice, non-measurable set.
- Point-set topology: topological spaces, open and closed subsets, continuous functions, homeomorphism and homotopy equivalence.
- Metric spaces, compactness, manifolds. Peano curve and Cantor staircase function.
- Fundamental group and covering spaces, Riemann surfaces.
- Projective spaces and Grassmannians.

TEXTBOOKS: J. R. Munkres. Topology — A First Course. Prentice Hall, 1975

COMMENTS: The course is suitable for all 1st year M.Sc. students or 2nd year B.Sc. students.

ADVANCED LEVEL COURSE «HAMILTONIAN MECHANICS»

LECTURER: I. M. Krichever

TITLE: Hamiltonian Mechanics

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: This is one of the basic theoretical physics courses for students in their 3–4 year of undergraduate studies and for Masters students. A core of mathematical methods of modern theory of Hamiltonian systems are concepts created in various branches of mathematics: the theory of differential equations and dynamical systems; the theory of Lie groups and Lie algebras and their representations; the theory of smooth maps of manifolds. Many modern mathematical theories, such as symplectic geometry and theory of integrable systems have arisen from problems of classical mechanics. That's why this course is recommended not only for those who plan to continue their studies in «Mathematical Physics» master program, but also for those who are planing to continue pure mathematical studies.

PREREQUISITES: No physics courses prerequisites.

SYLLABUS:

1)Lagrangian formalism: Least action principle; Euler – Lagrange equations; first integrals and symmetries of action.

2) Basics of Hamiltonian formalism: phase space; Legendre transform; Poisson brackets and symplectic structure; Darboux thoerem, Hamiltonian equayions.

3)Examples: Geodesics on Lie groups. Mechanics of solid body and hydrodinamics of ideal fluid.

4) Separations of variables and integrability: Hamitonian-Jacobi equations; canonical transformations. Moment map. Arnold – Liouville integrable systems. Lax representation.

TEXTBOOKS:
Литература для подготовки

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Курс теоретической физики, т.1, Механика. М.: Наука, 1988.

[2] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.

[3] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon. Introduction to Classical Integrable Systems. CUP, 2003.

ADVANCED LEVEL COURSE «INTEGRABLE SYSTEMS AND ADS/CFT CORRESPONDENCE»

LECTURER: Mikhail Alfimov

TITLE: Integrable Systems and AdS/CFT Correspondence

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19,   1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: In the present course the foundations of the AdS/CFT correspondence and integrable structures appearing in this context will be explained for the case of 4-dimensional superconformal gauge theory. As a pedagogical examples of the integrable systems solved by the Bethe Ansatz method Bose gas and Principal Chiral Field models will be considered. There will be given an introduction into the applications of the theory of integrable systems to the study of the spectrum of $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory and dual superstring theory on the $AdS_5 \times S^5$ background. The course is intended for PhD and Master students. Postdocs and Bachelor students are also welcome.

PREREQUISITES: The course is best suitable for PhD and Master students.

SYLLABUS:

- The model of Bose gas. Bethe equations for the spectrum of the Bose gas model and their thermodynamic limit. Thermodynamic Bethe Ansatz (TBA) equations for the Bose gas model.
- Principal Chiral Field (PCF) Model. Bethe equations for the spectrum of the PCF model and their thermodynamic limit. TBA equations for the PCF.
- Y- and T-system (Hirota equations) for PCF. Wronskian solution of the Hirota equations.
- AdS/CFT correspondence. String background $AdS_5 \times S^5$ as the solution of the supergravity equations.
- Classical integrability of the PCF model and $AdS_5 \times S^5$ superstring σ-model.
- Derivation of the S-matrix for the superstring σ-model on $AdS_5 \times S^5$ from Zamolodchikov-Faddeev algebra.
- Bethe equations for the XXX Heisenberg spin chain (1-loop spectrum of anomalous dimensions of the local operators in the $\mathfrak{sl}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM). Asymptotic Bethe equations for the spectrum of $\mathcal{N} = 4$ SYM. TBA equations for the spectrum of $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- Y- and T-system for the spectrum of $\mathcal{N} = 4$ SYM and the corresponding Hirota equations. Wronskian solution of these equations.
- Derivation of the AdS/CFT Quantum Spectral Curve for $AdS_5 \times S^5$ superstring theory and $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- Application of the QSC method for the $\mathfrak{sl}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM. Non-perturbative characteristics of the operator trajectories of the operator trajectories in the $\mathcal{N} = 4$ SYM.

TEXTBOOKS:

[1] V. Korepin, N. Bogoliubov, A. Izergin, Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, CUP, 1993, https://doi.org/10.1017/CBO9780511628832.

[2] N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday et al. Lett Math Phys (2012) 99:3, https://doi.org/10.1007/s11005-011-0529-2.

[3] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT correspondence. Strings, Branes and Extra Dimensions, 2004, https://doi.org/10.1142/9789812702821_0001.

COMMENTS: In the Spring term of 2017, I was giving the similar course at Skolkovo. In the next Fall term, it was moved to the Faculty of Mathematics. According to my previous experience, the actual duration of classes will be rather 2–2.5 hours than the traditional 1.5 hours. The course will also include solving the problems by the students. Keywords: supersymmetric gauge theory, integrable systems, gauge/string duality.

PRIMARY LEVEL COURSE «INTRODUCTION TO COMBINATORIAL THEORY»

LECTURER: Yu. M. Burman

TITLE: Introduction to Combinatorial Theory

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: Combinatorics is a part of mathematics studying finite sets. The question to answer is usualy «how many»: how many are there connected graphs with n numbered vertices containing no cycles? how many are there ways to draw diagonals of a convex n-gon so as to cut it into triangles? etc. This question is answered by a multitude of methods from real and complex analysis, number theory, geometry, and more. We do not expect, however, that the students are familiar with all these areas: the necessary techniques will be explained in the course. Combinatorics is very rich in applications, ranging from mathematical physics to algebraic geometry to finance, including topology and dynamical systems on the way. Very often questions from various sciences eventually turn to be combinatorial problems. Combinatorics is an indispensable part of every mathematician's education.

PREREQUISITES: no.

SYLLABUS: In the course, we study various combinatorial objects and various methods of solution of combinatorial problems. For convenience we list methods and objects separately in the program; in the actual course we alternate them.

1. Methods.
    - Formal power series.
    - Linear recurrence.
    - Lagrange inversion theorem.
    - Transfer matrix.
2. Objects.
    - Binomial coefficients.
    - Lattice paths.
    - Catalan numbers.
    - Partitions and compositions.
    - Trees.
    - Parking functions.
    - Hurwitz numbers.
    - Tutte polynomial.

TEXTBOOKS:

- S. Lando, *Lectures on Generating Functions*, AMS Student Mathematical Library, V. 23, 2003.
- G. F. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambrisdge University Press, 1984 (reprinted in 2003).

ADVANCED LEVEL COURSE «LIE GROUPS AND LIE ALGEBRAS»

LECTURER: G. I. Olshanski

TITLE: Lie Groups and Lie Algebras

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19,   2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: We shall begin with the basics of the theory of Lie groups and Lie algebras. Then we shall provide an accessible introduction to the theory of finite-dimensional representations of classical groups on the example of the unitary groups $\mathrm{U}(N)$.

PREREQUISITES: standard course of linear algebra.

SYLLABUS:

- linear Lie groups and their Lie algebras
- universal enveloping algebras
- the Haar measure on a linear Lie group
- general facts about representations of compact groups and their characters
- radial part of Haar measure
- Weyl's formula for characters of the unitary groups
- Weyl's unitary trick
- classification and realization of representations.

TEXTBOOKS:

1. W. Fulton, J. Harris, Representation theory. Springer 1991; Russian translation: 2017.
2. J. Faraut, Analysis on Lie groups. An introduction. CUP, 2008.
3. A. Kirillov, Jr., Introduction to Lie groups and Lie algebras. CUP, 2008; https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/mat552/liegroups.pdf

PRIMARY LEVEL COURSE «MARKOV CHAINS»

LECTURER: A. Dymov

TITLE: An introduction to Markov chains and their applications.

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Markov chains form the simplest class of random processes for which the future does not depend on the past but depends only on the present state of the process. Being rather simple, at the same time Markov chains have very deep and beautiful mathematics. They are known as probably the most important class of random processes, in particular, because of the numerous applications in mathematics, physics, biology, economics, etc. Indeed, once a stochastic process is given, it is natural to simplify it by assuming that the future does not depend on the past, and very often this approximation works well. The present course is the introduction to the theory of Markov chains. It will concern with their most important properties and the most known applications. The course is aimed at the 3rd and 4th year students, but is also possible for 1st and 2nd year students.

PREREQUISITES: basic courses of analysis and linear algebra.

SYLLABUS:

1. Examples of models leading to Markov chains.
2. Markov chains with finite number of states.
3. Ergodic properties of Markov Chains.
4. Applications of Markov Chains: random walks, birth-death processes, etc.
5. Entropy of Markov Chains.
6. Markov Chains with infinite number of states.

TEXTBOOKS:

- A. N. Shiryaev, Probability, 2nd ed., Springer, New-York (1995).
- J. G. Kemeny, J. L. Snell, Finite Markov chains, Springer-Verlag (1976).
- B. V. Gnedenko, Theory of probability, 6th ed., Boca Raton, FL: CRC Press (1998).

PRIMARY LEVEL COURSE «MATHEMATICAL METHODS OF SCIENCE»

LECTURER: A. S. Tikhomirov

TITLE: Mathematical methods of science

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: The notion of vector, respectively, principal bundle over a smooth manifold is one of the central notions in modern mathematics and its applications to mathematical and theoretical physics. In part icular, all known types of physical interations (gravitational, electromagnetic, etc.) are described in terms of connections and other geometric structures on vector/principal bundles on underlying manifolds. The properties of physical fields can be formulated in terms of geometric invariants of connections such as curvature and characteristic classes of corresponding vector/principal bundles. In this course we give an introduction to the differential geometry of vector and principal bundles and consider their metrics, connections, curvature and characteristic classes. Some applications to algebraic geometry, topology, and gauge theory of classical fields (in particular, Maxwell equations, Yang–Mills theory) are discussed.

PREREQUISITES: the standard courses in algebra, calculus, geometry, and topology for the first year of undergraduate study.

SYLLABUS:

- **Manifolds.** Manifolds and smooth maps. Tangent vectors. Vector fields. Differential forms. Exterior differentiation on a manifold. Exterior differentiation on $\mathbb{R}^3$. Pullback of differential forms.
- **Riemannian Manifolds.** Inner products on a vector space. Riemannian metric. Existence of a Riemannian metric. Regular curves. Arc length parametrization. Signed curvature of a plane curve. Orientation and curvature.
- **Affine Connections.** Affine connections. Torsion and curvature. The Riemannian connection.
- **Vector Bundles.** Definition of a vector bundle. The vector space of sections. Extending a local section to a global section. Local operators. Restriction of a local operator to an open subset. Frames. F-linearity and bundle maps. Multilinear maps over smooth functions.
- **Connections on a Vector Bundle.** Connections on a vector bundle. Existence of a connection on a vector bundle. Curvature of a connection on a vector bundle. Riemannian bundles. Metric connections. Restricting a connection to an open subset. Connections at a point.
- **Connection, curvature, and torsion forms.** Connection and curvature forms. Connections on a framed open set. Metric connection relative to an orthonormal frame. Connections on the tangent bundle. Covariant differentiation along a curve. Connection-preserving diffeomorphisms. Christoffel symbols.
- **Geodesics.** The definition of a geodesic. Reparametrization of a geodesic. Existence of geodesics. Geodesics in the Poincaré half-plane. Parallel translation. Existence of parallel translation along a curve. Parallel translation on a Riemannian manifold.
- **Exponential maps.** The exponential map of a connection. The differential of the exponential map. Normal coordinates. Left-invariant vector fields on a Lie group. Exponential map for a Lie group. Naturality of the exponential map for a Lie group. Adjoint representation. The exponential map as a natural transformation.
- **Distance and volume.** Distance in a Riemannian manifold. Geodesic completeness. Dual 1-forms under a change of frame. The volume form in local coordinates.

- **Operations on vector bundles.** Vector subbundles. Subbundle criterion. Quotient bundles. The pullback bundle. Examples of the pullback bundle. The direct sum of vector bundles. Other operations on vector bundle.
- **Vector-valued forms.** Vector-valued forms as sections of a vector bundle. Products of vector-valued forms. Directional derivative of a vector-valued function. Exterior derivative of a vector-valued form. Differential forms with values in a Lie algebra. Pullback of vector-valued forms. Forms with values in a vector bundle. Tensor fields on a manifold. The tensor criterion.
- **Connections and curvature again.** Connection and curvature matrices under a change of frame. Bianchi identities. The first Bianchi identity in vector form. Symmetry properties of the curvature tensor. Covariant derivative of tensor fields. The second Bianchi identity in vector form. Ricci curvature. Scalar curvature. Defining a connection using connection matrices. Induced connection on a pullback bundle.
- **Characteristic classes.** Invariant polynomials on $\mathfrak{gl}_r(\mathbb{R})$. The Chern–Weil homomorphism. Characteristic forms are closed. Differential forms depending on a real parameter. Independence of characteristic classes of a connection. Functorial definition of a characteristic class.
- **Pontrjagin classes. The Euler class and Chern classes.** Vanishing of characteristic classes. Pontrjagin classes. The Whitney product formula. Orientation on a vector bundle. Characteristic classes of an oriented vector bundle. The Pfaffian of a skew-symmetric matrix. The Euler class. Generalized Gauss–Bonnet theorem. Hermitian metrics. Connections and curvature on a complex vector bundle. Chern classes.
- **Some applications of characteristic classes.** The generalized Gauss–Bonnet theorem. Characteristic numbers. The cobordism problem. The embedding problem. The Hirzebruch signature formula. The Riemann–Roch.
- **Principal bundles.** Principal bundles. The frame bundle of a vector bundle. Fundamental vector fields of a right action. Integral curves of a fundamental vector field. Vertical subbundle of the tangent bundle TP. Horizontal distributions on a principal bundle.
- **Connections on a principal bundle.** Connections on a principal bundle. Vertical and horizontal components of a tangent vector. The horizontal distribution of an Ehresmann connection. Horizontal lift of a vector field to a principal bundle. Lie bracket of a fundamental vector field. Horizontal distributions on a frame bundle. Parallel translation in a vector bundle. Horizontal vectors on a frame bundle. Horizontal lift of a vector field to a frame bundle. Pullback of a connection on a frame bundle under a section.
- **Curvature on a principal bundle.** Curvature form on a principal bundle. Properties of the curvature form. The associated bundle. The fiber of the associated bundle. Tensorial forms on a principal bundle. Covariant derivative. A formula for the covariant derivative of a tensorial form.
- **Characteristic classes of principal bundles.** Invariant polynomials on a Lie algebra. The Chern–Weil homomorphism.
- **Applications to gauge theory of classical fields.** The Yang–Mills functional. Maxwell equations, rank two Euclidean Yang–Mills theory: instantons.

TEXTBOOKS:

- L. Tu. Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes. Springer, 2017.
- K. Nomizu. Lie Groups and differential geometry. 1956.
- R. Palais. The geometrization of physics. 1981.

- T. Aubin. Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampere equations. Springer, 1982.

Additional textbooks:

- C. H. Taubes. Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature. Oxford, 2011.
- P. Petersen. Riemannian geometry. Springer, 2006.
- J. Milnor, J. Stasheff. Characteristic classes. Princeton, 1974.
- C. Nash, S. Sen. Topology and geometry for physicists. Academic Press, 1987.

PRIMARY LEVEL COURSE «MATHEMATICAL STATISTICS»

LECTURER: A. S. Skripchenko

TITLE: Introduction to mathematical statistics

LEARNING LOAD: second module (November–December) of the Fall term 2018/19 A.Y., 2 classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The main goal of mathematical statustics is an adaptation of the theoretical probabilistic models to some practical problems in economics, physics, medicine, social sciences. Typically the precise distribution or random process that describes some phenomenon is not known; however, some information can be extracted from the series of observations or repeated experiments; this data is be used to select the most appropriate model.

PREREQUISITES: the most basic part of probability theory, like distributions of random variables, mathematical expectations and variances for random variables, statement of the central limit theory (knowledge of the proof is not required).

SYLLABUS:

- Statistical models, samples, descriptive statistics. Empirical approach: empirical distribution and Glivenko – Cantelli theorem.
- Parametric statistics: estimations and their main properties. Unbiased estimators. Efficient estimators. Cramer – Rao low bound. Consistent estimators. Fisher – Neumann factorization theorem. Rao – Blackwell theorem. Confidence intervals.
- Statistical hypothesis testing. Common test statistics. Null hypothesis statistical significance testing. Neumann – Pearson lemma and the most powerful test at the given significance level.

TEXTBOOKS:

- David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves, «Statistics».
- David Williams, «Weighing the odds: a course in probability and statistics».
- М. Лачугин, «Наглядная математическая статистика».

COMMENTS: it is a short (1-module) course given in the *second* module (November–December). The course is strongly recommended for the students who are planning to include econometrics and related subjects in their future individual plans. The course can be taught in English or in Russian.

ADVANCED LEVEL COURSE «NUMBER THEORY»

LECTURER: M. V. Finkelberg

TITLE: *p*-adic numbers

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: p-adic numbers were discovered by Hensel at the turn of 20-th century as an alternative to the classical real analysis in order to solve number theoretic problems. The development of p-adic analysis allowed Dwork to prove the first Weil conjecture on the number of solutions of algebraic equations over finite fields in 1960's. The goal of the course is to understand this proof and to learn the basics of p-adic analysis.

PREREQUISITES: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии) и теория Галуа.

SYLLABUS:

- Metrics on the field of rational numbers.
- p-adic numbers.
- Hilbert symbol.
- Quadratic forms over p-adic fields.
- Minkowski – Hasse theorem.
- Algebraic closure of p-adic field.
- Tate field.
- Artin – Hasse exponent.
- Newton polygons.
- Zeta-functions.
- Rationality of zeta-function.

TEXTBOOKS:

[K] Н. Коблиц, «p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции».

[C] Ж. П. Серр, «Курс арифметики».

PRIMARY LEVEL COURSE «SYMMETRIC FUNCTIONS»

LECTURER: E. Yu. Smirnov

TITLE: Symmetric functions

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: The theory of symmetric functions is one of the central branches of algebraic combinatorics. Being a rich and beautiful theory by itself, it also has numerous connections with the representation theory and algebraic geometry (especially geometry of homogeneous spaces, such as flag varieties, toric and spherical varieties). In this course we will mostly focus on the combinatorial aspects of the theory of symmetric functions and study the properties of Schur polynomials. In representation theory they appear as characters of representations of $GL(n)$; they are also closely related with the geometry of Grassmannians. The second half of the course will be devoted to Schubert polynomials, a natural generalization of Schur polynomials, defined as «partially symmetric» functions. Like the Schur functions, they also have a rich structure and admit several nice combinatorial descriptions; geometrically they appear as representatives of Schubert classes in the cohomology ring of a full flag variety. Time permitting, we will also discuss K-theoretic (non-homogeneous) analogues of Schur and Schubert polynomials.

PREREQUISITES: the standard courses in algebra and discrete mathematics or combinatorics. Some knowledge of representation theory of symmetric and general linear groups is not required, but helpful.

SYLLABUS:

1. Symmetric polynomials. The ring of symmetric functions. Bases of the ring of symmetric functions: elementary, complete, monomial symmetric functions, power sums. Transition formulas between these bases.
2. Schur functions. Algebraic definition. Jacobi-Trudi formula. Combinatorial definition, equivalence with the algebraic definition. Young tableaux.
3. Applications to combinatorics: enumerating plane partitions. MacMahon formula.
4. Richardson – Schensted – Knuth (RSK) correspondence. Jeu de taquin.
5. Multiplication of Schur functions. Pieri rule. Littlewood – Richardson rule. Knutson – Tao puzzles*.
6. Symmetric group, its Coxeter presentation. The Bruhat order. The Lehmer code and the essential set of a permutation.
7. «Partially symmetric» polynomials. Divided difference operators. Schubert polynomials.
8. Properties of Schubert polynomials. Monk's formula, Lascoux transition formula.
9. Combinatorial presentation of Schubert polynomials. Pipe dreams. Positivity. Fomin – Kirillov theorem.
10. Flagged Schur functions, determinantal formulae.
11. Generalizations*: double Schubert polynomials, Stanley symmetric functions, Grothendieck polynomials.

TEXTBOOKS:

1. W. Fulton. Young tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry. CUP, 1997

2. L. Manivel. Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Société Mathématique de France.
3. I. G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. Clarendon Press, 1998.
4. R. Stanley. Enumerative combinatorics, vol.2. CUP, 1999.

COMMENTS: In the Syllabus, marked with stars are advanced topics that will be considered if the time allows. There are Russian translations for the textbooks [1], [3], [4], and English for [2].

PRIMARY LEVEL COURSE «TOPICS IN DIFFERENTIAL AND ALGEBRAIC TOPOLOGY»

LECTURER: P. E. Pushkar

TITLE: Topics in differential and algebraic topology

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: We will start by introducing the basic notions and objects such as manifolds and tangent spaces. After that we will discuss the inverse and implicit function theorems from the viewpoint of tangent spaces, Sard's lemma and the Morse lemma, as well as Whitney's immersion and embedding theorems. In the topology part of the seminar we will see CW-complexes, approximation theorems, simplicial homology, the fundamental group and higher homotopy groups. We will also discuss the de Rham cohomology which forms a connection between the differential and topological approaches.

PREREQUISITES: Undergraduate calculus and linear algebra.

SYLLABUS: Tentative list of topics:

A. Differential topology:
   - A.0 Smooth manifolds and tangent bundles
   - A.1 Inverse and implicit function theorems
   - A.2 Sard's lemma
   - A.3 Morse lemma
   - A.4 Whitney's immersion and embedding theorems
   - A.5 Transversal intersections and transversality theorems

B. Algebraic topology:
   - B.1 CW-complexes
   - B.2 Cellular and simplicial approximation theorems
   - B.3 Complexes and exact sequences
   - B.4 Simplicial homology
   - B.5 The fundamental group and higher homotopy groups
   - B.6 De Rham cohomology

TEXTBOOKS:

- V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko. Singularities of Differentiable Maps, Vol. 1. Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts.
- R. Bott, L. Tu. Differential forms in algebraic topology.
- J. Milnor, J. Stasheff. Characteristic classes.

SEMINAR FOR BEGINNERS «TORIC VARETIES»

ADVISOR: K. G. Kuyumzhiyan

TITLE: Toric Varieties

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: This is an introduction to the theory of toric varieties, which are algebraic manifolds obtained from convex polytopes by means of some wonderful explicit geometric construction. For example, the standard n-simplex gives in this way the projective space of dimension n. The advantage of the pass from polytopes to toric varieties is that the crutial combinatorial and geometric properties of polytopes predetermine the key properties of the corresponding varieties and vice versa. Almost all essential algebraic, geometric, and topological characteristics of a toric variety are explicitly computable in terms of its polytope. This makes the toric varieties very suitable for testing algebro-geometric and topological conjectures, seeking examples and counterexamples, etc.

PREREQUISITES: In the first half of the course, we need Convex Geometry, Commutative Algebra, and basic properties of affine and projective algebraic varieties. In the second half, some more advanced notions from algebraic geometry are required, such as divisors and algebraic group actions. However, a deep knowledge of Algebraic Geometry is not assumed, and all necessary things will be precisely formulated and either proven or provided with explicit references to textbooks.

SYLLABUS: Affine and projective toric varieties, orbit – cone correspondence, automorphisms of affine toric varieties and locally nilpotent derivations, resolution of singularities in dimension 2 and continued fractions. Divisors on toric varieties. Cohomology groups of nonsingular toric varieties.

TEXTBOOKS:

- D. Cox, J. Little, H. Schenck. Toric varieties. GTM 124, AMS, 2011.
- W. Fulton. Introduction to toric varieties. Ann of Mathematics Studies 131, Princeton University Press, 1993.
- В. И. Данилов. Геометрия торических многообразий. УМН 33:2(200), 1978, с. 85-–134.
- T. Oda. Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Results in Mathematics and Related Areas (3) 15, Springer-Verlag 1988.

COMMENTS: The course is suitable for students of the third year and above.

Описания семинаров на русском

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СЕМИНАР»

РУКОВОДИТЕЛЬ: В. А. Гриценко

НАЗВАНИЕ: НИС по алгебре для студентов первого и второго курсов бакалавриата

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Обязательный курс алгебры не может вместить все интересные и важные вопросы, которые надо было бы изучить в течение первых трёх семестров. Цель этого НИСа — заглянуть за границы курса алгебры как с точки зрения теоретических конструкций, так и с точки зрения современных приложений. Мы попробуем решать и оригинальные исследовательские задачи, доступные мотивированным студентам младших курсов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: идущий параллельно обязательный курс алгебры.

ПРОГРАММА: Программа будет отчасти зависеть от активности участников. Ниже идёт список возможных тем, которых мы собираемся коснуться.

Кольца. Конечные кольца. Мультипликативные функции и функция Мёбиуса. Обобщения функции Эйлера. Многочлены над конечными полями. Кольца чисел Эйзенштейна и квадратичные расширения. Тело кватернионов, целые кватернионы, обобщённые кватернионные алгебры.

Линейная алгебра. Плоскость Фано и конечные проективные плоскости. Бинарное векторное пространство: q-обобщения числа сочетаний, аффинная геометрия, грассманиан и лагранжинаны. Общая линейная группа над конечным полем. Примеры линейных кодов: код Хэмминга, код Голея и их группы автоморфизмов. Приведение матриц над конечным полем.

Группы. Подгруппы прямого произведения. Автоморфизмы группы перестановок. Изоморфизмы классических групп над полями. Изоморфизмы линейных групп на кольцами. Группы инвариантов различных объектов. Системы корней и группы Вейля, инвариантные и антиинвариантные многочлены. Расширения групп, первые группы когомологий.

УЧЕБНИКИ: Подробности по всем темам можно найти в Википедии. Специальные книги и статьи будут выдаваться участникам во время работы семинара.

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОДЕЛЕЙ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: В. Б. Шехтман

НАЗВАНИЕ: Введение в теорию моделей

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Теория моделей — быстро прогрессирующая область, на стыке математической логики, алгебры и других дисциплин: теории алгоритмов, теории множеств, теории категорий, теории игр. Она изучает связь между математическими структурами и их формальными теориями. Методы теории моделей применяются для решения трудных проблем, например, проблемы континуума или проблемы Уайтхеда. Цель курса — знакомство с основными понятиями и методами теории моделей.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Логика и алгоритмы (1 модуль), основы алгебры, основные понятия топологии.

ПРОГРАММА: Теории и модели. Полнота и компактность. Элементарные расширения. Опускание типов. Модельная полнота. Элиминация кванторов. Ультрапроизведения. Насыщенные модели. Категоричность.

УЧЕБНИКИ:

- Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. М. Наука, 1982.
- Бруно Пуаза. Курс теории моделей. https://www.math.wisc.edu/~lempp/poizat/poizat1251.html.
- W. Hodges. Model theory. CUP, 1993
- D. Marker. Model theory. Springer, 2002.
- Д. Кейслер, Ч. Чэн. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

КОММЕНТАРИЙ: Курс доступен студентам, начиная со 2 курса, а также продвинутым первокурсникам (в виде исключения).

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

РУКОВОДИТЕЛЫ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный

НАЗВАНИЕ: Геометрия и анализ в теории дифференциальных уравнений

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Первый семестр планируется провести в виде спецкурса: начать с основ аналитической теории дифференциальных уравнений, теории линейных дифференциальных уравнений и их деформаций, затем рассмотреть связь этой общей теории с исследованием известных нелинейных уравнений. Во втором семестре планируется серия докладов участников семинара о геометричеких подходах к изучению дифференциальных уравнений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы линейной алгебры, дифференциальных уравнений и комплексного анализа.

ПРОГРАММА:

1. Специфика комплексных дифуров: метод мажорант, теорема существования и единственности.
2. Линейные дифференциальные уравнения: глобальная теория — представление монодромии, локальная теория — разложение Левеля.
3. Фуксовы и регулярные дифференциальные уравнения, соотношение Фукса.
4. Свойство Пенлеве. Нелинейные уравнения первого порядка.
5. Изомонодромные деформации и уравнения Пенлеве, симметрии и алгебраические решения.
6. Локальные формальные нормальные формы нелинейных систем. Теоремы Пуанкаре и Пуанкаре – Дюлака. Сходимость формальной замены в нерезонансном случае.

УЧЕБНИКИ:

1. В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Y. S. Ilyashenko, S. Yakovenko. Lectures on analytic differential equations. Graduate Studies in Math. vol. 86, AMS, 2007 (русская версия: Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко. Аналитическая теория дифференциальных уравнений).
3. А. А. Болибрух. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2001 (или дополненное издание: А. А. Болибрух. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009).
4. В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехтеоретиздат, 1950.
5. B. Kruglikov, V. Lychagin. Differential Equations — Geometry, Symmetries and Integrability. Springer, 2008.

КОММЕНТАРИЙ: Семинар планируется проводить на русском языке, хотя, при необходимости, возможен частичный переход на английский язык.

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «ГЕОМЕТРИЯ И ГРУППЫ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: О. В. Шварцман

НАЗВАНИЕ: Геометрия и группы

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Первое знакомство с идеей *симметрии* на примере очаровательной коллекции плоских кристаллографических групп, симметрических групп, групп самосовмещений правильных многогранников, фундаментальных групп некоторых поверхностей, групп автоморфизмов деревьев, линейных и проективных групп над конечными полями и других интересных групп, тесно связанных с геометрией, доступной первокурснику.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

Первый семестр.

- Что такое группа преобразований.
- Группа движений евклидовой плоскости. Вращения и отражения.
- Группа движений правильного многоугольника.
- Первая экскурсия в комбинаторную теорию групп: образующие и соотношения.
- Что такое дискретная группа движений плоскости.
- Кристаллографические группы.
- Фундаментальная область. Решетки и их фундаментальные области Вороного.
- Теорема Бибербаха.
- Правильные замощения плоскости.
- Группа движений трехмерного евклидова пространства.
- Теорема Эйлера.
- Группы отражений как группы симметрий правильных многогранников.
- Вторая экскурсия в комбинаторную теорию групп: образующие и соотношения для групп Кокстера.
- Симметрическая группа как группа Кокстера.

Второй семестр.

- Дискретные кристаллографические группы в трехмерном евклидовом пространстве.
- Решетки и их фундаментальные области (элементарная теория многогранников Вороного).
- Теорема Бибербаха.
- Примеры высокосимметричных замощений пространства.

- Выпуклые тела и решетки. Теорема Минковского и некоторые ее применения в геометрии и теории чисел.
- Что такое фуксова группа. Алгебра и геометрия модулярной группы и её друзей.
- Третья экскурсия в комбинаторную теорию групп: группы, действующие на деревьях.
- Правильные мозаики на плоскости Лобачевского.

УЧЕБНИКИ:

1. В. В. Никулин, И. Р. Шафаревич. Геометрия и группы, Наука, 1982.
2. Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию, Мир, 1968

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «ГЕОМЕТРИЯ И ДИНАМИКА»

РУКОВОДИТЕЛЫ: А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко

НАЗВАНИЕ: Геометрия и динамика

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар рассчитан на студентов 1-2 курса бакалавриата. Мы предполагаем рассказать слушателям о понятиях, методах и результатах из различных разделов геометрии, динамики и смежных областей, при этом нередко соображения из одной области будут использоваться в работе с объектами другой природы. Как правило, в течение двух лет разбираемые сюжеты почти не повторяются.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА: НИС состоит из почти независимых блоков в 1-3 занятия. Вот некоторые из тем:

- символическое кодирование: связь отображения $x \mapsto \{2x\}$ на единичном отрезке с подбрасыванием монетки
- энтропия динамической системы: как измерить «случайность» поведения системы?
- диффеоморфизмы окружности: классификация с точностью до сопряжения, инвариант классификации (число вращения), достаточность его для классификации, поведение числа вращения в семействах
- математические бильярды: все динамические системы от параболических до гиперболических в одной задаче
- цепные дроби: как динамика помогает теории чисел и при чем тут геодезические?
- динамика рациональных отображений: фракталы, множества Жюлиа и другие звери
- геометрия классических групп

УЧЕБНИКИ:

- А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
- С. Табачников. Геометрия и биллиарды. Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», М. - Ижевск, 2011.
- Э. Артин. Геометрическая алгебра. М.: «Наука», 1969.

КОММЕНТАРИЙ: Весенний семестр можно, хотя и не рекомендуется, брать без осеннего. В случае если этот НИС уже был взят один раз в прошлом году, разрешается взять его во второй раз.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. В. Семёнов

НАЗВАНИЕ: Геометрия и топология банаховых пространств

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: рассчитанный на 20 занятий курс, не предполагающий скрупулёзного изучения бесконечномерной топологии и геометрии банаховых пространств, а в основном ориентированный на детальное знакомство с несколькими локальными результатами, каждый из которых в своё время был своего рода математической сенсацией и оказал заметное влияние на дальнейшее развитие этого раздела математики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, геометрия, алгебра и введение в топологию в объёме первых двух лет бакалавриата.

ПРОГРАММА: После знакомства с традиционными примерами банаховых пространств и их свойствами, основное внимание будет сконцентрировано на следующих теоремах и связанных с ними сюжетах:

- о попарном изоморфности пространств непрерывных функций на несчетных компактах (А. А. Милютин)
- о наличии недополняемых подпространств в не гильбертовых пространствах (Й. Линденштраусс – Л. Цафрири)
- о гомеоморфности выпуклых бесконечномерных компактов гильбертову кубу (О. Келлер)
- о гомеоморфности сепарабельного бесконечномерного банахова пространства гильбертову пространству (М. И. Кадец).

УЧЕБНИКИ:

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
2. У. Рудин. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
3. А. Пелчинский. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. М.: «Мир», 1970.
4. J. van Mill. Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction. North Holland, Elsevier, 1989.
5. C. Bessaga, A. Pelczynski. Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa, PWN, 1975.
6. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Classical Banach spaces I. Sequence spaces. Springer-Verlag, 1977.

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: И. В. Артамкин

НАЗВАНИЕ: Избранные главы дискретной математики

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Под дискретной математикой в нашей стране обычно понимают собрание разрозненных математических сюжетов, оказавшихся полезными в информатике или смежных прикладных областях. Некоторые из этих сюжетов входят в обязательные курсы математической логики и дискретной математики, читаемые в бакалавриате. На нашем семинаре обсуждаются не вошедшие в эти курсы конструкции, имеющие, тем не менее, заметное значение как в математике, так и в приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

- Булевы функции и теорема Поста о функциональной полноте. Эта теорема даёт эффективный ответ на следующий вопрос: можно ли любую булеву функцию (от любого числа переменных) выразить с помощью операции композиции через заданный набор функций. Удивительно, что на такой вопрос имеется простой и содержательный ответ, позволяющий, например, придумать функцию от двух переменных, через которую можно выразить любую функцию.
- Конечные поля. Теорема о том, что мультипликативная группа конечного поля является циклической, позволяет строить длинные периодические последовательности, повсеместно используемые в радиолокации, системах опознавания «свой-чужой» и т.д.
- Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке в транспортной сети. Речь идет о такой задаче: имеется некоторая сеть дорог (трубопроводов), соединяющих пункты А и Б. У каждой дороги (трубы) есть своя максимальная пропускная способность — наибольшее число автомобилей (баррелей нефти) которые могут пройти по этой дороге (трубе) за час. Требуется организовать движение (перекачку нефти) таким образом, чтобы общее число автомобилей (баррелей нефти), попадающее за час из А в Б, было максимально возможным. Оказывается, многие важные результаты и алгоритмы теории графов, как прикладные, так и чисто математические, связаны с этим кругом идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Ф. Харири. Теория графов. М.: УРСС, 2003.
2. В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. Теория графов. М.: Высш. школа, 1976.
3. М. Свами, К. Тхулалираман. Графы, сети и алгоритмы. М: Мир, 1984.
4. А. И. Кострикин. Основы алгебры.
5. Барти, Биркгоф. Современная прикладная алгебра. М. 1976.
6. А. И. Сирота, Ю. И. Худак. Основы дискретной математики. Ч. 1. М. 2010.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ПЕРЕСТАНОВКИ, НАКРЫТИЯ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ»

РУКОВОДИТЕЛЫ: М. Э. Казарян, С. К. Ландо

НАЗВАНИЕ: Перестановки, накрытия, интегрируемость

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: Spring, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс ориентирован на студентов 3–4 курса бакалавриата, студентов магистратуры и аспирантов, а также всех интересующихся современными вопросами построения решений интегрируемых систем и их связью с комбинаторикой групп перестановок, графов и геометрией пространств модулей комплексных кривых и их отображений. Курс основывается на современных исследованиях, в том числе, на работах лекторов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы первых двух лет бакалавриата

ПРОГРАММА:

- Перестановки и их разложения в произведение транспозиций и перестановок другого вида.
- Центр групповой алгебры симмтрической группы и его различные реализации.
- Разветвленные накрытия поверхностей, монодромия.
- Интегрируемые иерархии Кадомцева – Петвиашвили и Кортевега – де Фриза.
- Бозон-фермионное соответствие, полубесконечный грассманиан и теорема Сато.
- Эволюционное уравнение (уравнение склейки-разреза).
- Числа Гурвица и производящие функции для них как решения интегрируемых иерархий.
- Рекурсия Татта стягивания-удаления ребра, уравнения Вирасоро и соотношения топологической рекурсии.
- Обзор различных комбинаторных задач, приводящих к решениям интегрируемых иерархий.

УЧЕБНИКИ: А. К. Звонкин, С. К. Ландо. Графы на поверхностях и их приложения, М.: МЦНМО, 2010 + статьи, актуальные на момент чтения спецкурса.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «СЮЖЕТЫ ИЗ ТЕОРИИ ГРУППЫ КОС И ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ГРУПП: ПРОИСХОЖДЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ R-МАТРИЦ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. Н. Пятов, П. А. Сапонов

НАЗВАНИЕ: Сюжеты из теории группы кос и теории квантовых групп: происхождение и применение R-матриц.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В этом курсе мы обсуждаем несколько тем из теории группы кос и теории квантовых групп, в которых появляется и применяется один из самых известных объектов современной математической физики — так называемая R-матрица. R-матрица в узком понимании этого термина, с которым мы, в основном, и будем иметь дело, — это решение (кубического матричного) уравнения Янга – Бакстера, известного также как соотношение Артина или уравнение кос. Сферы применения R-матриц в настоящее время очень разнообразны — от теории точно решаемых моделей статистической физики и теории поля до проблем построения инвариантов узлов, структурной теории и теории представлений квантовых матричных алгебр. Участники семинара познакомятся с алгебраическими корнями происхождения R-матриц и их ролью в теории инвариантов узлов и теории квантовых групп.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для понимания курса требуется знание линейной алгебры, теории групп и теории представлений в рамках программы первых 2-х курсов бакалавриата. Желательно также знакомство с основами теории групп Ли и алгебр Ли, алгебр Хопфа. Впрочем, все необходимые понятия будут напоминаться в процессе занятий.

ПРОГРАММА:

- Группа кос, ее геометрическое и алгебраическое представления. Конечномерные факторы группы кос и ее групповой алгебры: симметрическая группа, алгебра Гекке. Операторы Юциса – Мёрфи и бакстеризованные элементы в алгебре Гекке, ее неприводимые представления, связь с таблицами и диаграммами Юнга.

- R-матричные представления группы кос, примеры R-матриц: R-матрицы $\mathrm{GL}(m|n)$ типа. Первые приложения R-матриц: R-след и инварианты узлов.

- Понятие об алгебрах Хопфа. Коумножение, коединица и антипод с точки зрения теории представлений. Двойственные алгебры Хопфа.

- Коммутативная алгебра с пуассоновой структурой и ее квантование. Алгебра функций на группе и скобка Склянина как пример r-матричной скобки Пуассона. Квантованная алгебра функций на группе: R-матричный подход (так называемая RTT-алгебра).

- Алгебра функций на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$, скобка Пуассона-Ли. Квантование скобки Пуассона-Ли и универсальная обертывающая алгебра $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}(n))$. Квадратичная скобка на алгебре функций на $\mathfrak{gl}^*(n)$ и её согласованность с линейной скобкой Пуассона – Ли (пучком скобок Пуассона). Квантование пучка скобок Пуассона: алгебра уравнения отражений. Структура ее характеристической подалгебры, спектр квантовой матрицы, квантовая версия теоремы Гамильтона – Кэли.

- Теория конечномерных разложимых представлений алгебры уравнения отражений.

УЧЕБНИКИ:

- O. Ogievetsky, P. Pyatov. Lecture on Hecke algebras. Preprint CPT-2000/P.4076.

- J. S. Birman, T. E. Brendle. Braids: a Survey. `arXiv:math/0409205 [math.RT]`. In: «Handbook of Knot Theory», ed. by W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier, 2005.
- К. Кассель. Квантовые группы. М.: Фазис, 1999.
- A. Klimyk, K. Schmuedgen. Quantum groups and their representations. Springer, 1997.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «МАТЕМАТИКА ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА»

РУКОВОДИТЕЛЬ: К. П. Зыбин

НАЗВАНИЕ: Математика процессов переноса

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Участники семинара познакомятся с методами описания процессов переноса в различных средах. Будут рассмотрены как классические вопросы последовательного вывода кинетических уравнений из цепочки Боголюбова для обычных газов и плазмы, так и современные методы исследования динамики различных полей, погруженных в турбулентные пульсации.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: необходимы математический анализ, дифференциальные уравнения; желательны асимптотические методы решения дифференциальных уравнений.

ПРОГРАММА: С использованием классической техники вывода кинетических уравнений предполагается получить уравнения, описывающие ускорение космических лучей и исследовать их решения. Отдельно будет рассмотрен предел малых длин пробега частиц и получено обоснование гидродинамического приближения как результат асимптотического разложения кинетического уравнения. Основываясь на анализе стохастической T-экспоненты предполагается исследовать корреляционные функции примесных частиц в развитой гидродинамической турбулентности, обсудить на этом примере явление перемежаемости, типичное для различных корреляционных функций, описывающих турбулентность.

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «МАТЕМАТИКА ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. И. Арсеев

НАЗВАНИЕ: Математика физических явлений

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2018/19, 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Мы обсудим связь реальных физических явлений с математическими методами их описания, возникновение математических структур из законов физики, в первую очередь, в механике, электростатике, электродинамике. Среди тем связь второго закона Ньютона с Лагранжевым формализмом, движение «по прямой» на криволинейной поверхности, поведение гироскопа, эквивалентность закона Кулона теореме Гаусса и т.п. Семинар рассчитан, скорее, на студентов 2-3 курсов бакалавриата, но подготовленные студенты 1 курса не должны встретить серьёзных трудностей.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: желательно знание основ математического анализа и понимание простых дифференциальных уравнений.

ПРОГРАММА:

Механика

- Второй закон Ньютона — основа описания классического движения. Примеры динамики. Законы сохранения из уравнений движения.
- От законов Ньютона к лагранжевой формулировке. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения с точки зрения лагранжевого подхода.
- «Свободное движение» в криволинейном пространстве. Движение по сфере и поверхностям вращения. Описание с помощью метрики.
- Движение быстро вращающихся тел. Нетривиальность их свободного движения. «Антиинтуитивное» поведение гироскопа.
-

Электростатика

- Закон Кулона как прямое следствие эксперимента. Понятие потока векторного поля. Эквивалентность теоремы Гаусса «экспериментальной» формулировке закона Кулона. Дивергенция векторного поля, дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнения Лапласа и Пуассона.
- Решение задач электростатики с помощью теоремы Гаусса. Поле заряженных плоскостей и стержней. Понятие о двумерной и одномерной электростатике и специфических «законах Кулона». Заряды над поверхностью металла.
- Электрическое поле в диэлектриках. Поверхностные заряды и граничные условия для электрического поля в неоднородной системе. Метод зарядов изображений — физическое решение задачи о нахождении решения дифференциального уравнения с граничными условиями.

Электродинамика

- Взаимодействие токов. Экспериментальные законы Эрстеда и Ампера. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Движение частицы в магнитном поле.

- Понятие векторного потенциала. Ротор векторного поля, формула Стокса. Свойства векторного потенциала, сравнение со скалярным потенциалом. Дифференциальная формулировка законов электромагнетизма при условии стационарности токов. Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем.
- Закон Фарадея, его интегральная и дифференциальная формулировки. Система уравнений Максвелла. Еще раз их физический смысл и математическая формулировка. Полный Лагранжиан электромагнитного поля — возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Уравнения электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в среде. Граничные условия на поверхности раздела двух сред.
- Отражение от поверхности раздела двух сред. Два метода решения задачи об отражении от плоскопараллельной пластины. Поверхностные волны
- Волноводы и резонаторы. Дискретные частоты собственных колебаний — путь к описанию полей как набора осцилляторов.

УЧЕБНИКИ:

1. Фейнман Р.,Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1967.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Физматлит, 1974.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2004.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1977.

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «МНОГОГРАННИКИ И ВЫПУКЛАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. И. Эстеров

НАЗВАНИЕ: Многогранники и выпуклая геометрия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Многогранники и свойства выпуклости играют важную роль почти во всех разделах математики и её приложений. Мы изучим геометрическое, алгебраические, комбинаторные и аналитические аспекты выпуклой геометрии и увидим, почему многогранники и выпуклые тела оказываются важны даже в таких, казалось бы, неожиданных областях, как алгебраическая геометрия и теория чисел. Чтобы иметь возможность увидеть панораму в целом, мы постараемся не углубляться в детали отдельных важнейших разделов, таких как группы Кокстера, тропическая геометрия или линейное программирование — им у нас на факультете посвящены специальные курсы. Материал курса будет доступен для студентов всех курсов, включая первокурсников бакалавриата и магистрантов, которые параллельно смогут успешно следовать обязательной программе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Введение в предмет (лекции):
   - Аффинное пространство, выпуклые тела и оболочки.
   - Конусы, опорные плоскости, двойственные конусы.
   - Линейные неравенства, алгоритм Фурье – Моцкина.
   - Многогранники, грани, объёмы, смешанные объёмы.
2. Сюжеты о важных классах многогранников (рефлексивные, вторичные, расслоенные, циклические, пустые, ковыпуклые, виртуальные …), их инвариантах (эйлерова характеристика, f- и h-векторы, полином Эрхарта …), связях с другими областями математики (алгебраическая геометрия, теория чисел …), текущих исследованиях и открытых проблемах. Помимо лекций и семинаров, в рамках второй части курса планируются доклады слушателей.

УЧЕБНИКИ: Первое представление о предмете можно составить по ёмким, но сжатым русскоязычным введениям (1-3). Более доступное и развёрнутое изложение см. в англоязычных учебниках (4-7).

1. А. Л. Городенцев, «Геометрия», лекции 8–9,
   http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/list.html
2. В. М. Тихомиров, «Выпуклый анализ и его приложения»,
   https://www.mccme.ru/free-books/dubna/tich.pdf
3. В. А. Тиморин, «Комбинаторика выпуклых многогранников»,
   https://www.mccme.ru/free-books/dubna/timorin.pdf
4. A. Brondsted, «An Introduction to Convex Polytopes» (перевод: А. Брёнстед, Мир 1988),
   https://books.google.ru/books?id=7PXxBwAAQBAJ&printsec=frontcover
5. C. Haase, B. Nill, A. Paffenholz, «Lecture Notes on Lattice Polytopes»,
   https://polymake.org/polytopes/paffenholz/data/preprints/ln_lattice_polytopes.pdf
6. M. Beck, S. Robins, «Computing the Continuous Discretely»,
   http://math.sfsu.edu/beck/papers/noprint.pdf
7. G. Ziegler, «Lectures on Polytopes»,
   https://books.google.ru/books?id=xd25TXSSUcgC&lpg=PP1&hl=ru&pg=PP1#v=onepage&q&f=false

НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ДЛЯ МЛАДШИХ КУРСОВ «ПРОЕКТИВНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

РУКОВОДИТЕЛИ: И. В. Артамкин, А. Л. Городенцев, А. С. Тихомиров

НАЗВАНИЕ: Проективная алгебраическая геометрия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Цель семинара - рассказать о геометрических истоках алгебраической геометрии. Поэтому семинар рассчитан как на студентов-младшекурсников, имеющих совсем элементарный начальный уровень, так и на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, которые уже имеют серьезную техническую базу в алгебраической геометрии (однако, и для них знакомство с наглядными геометрическими картинками несомненно будет полезно). На семинаре предполагается обсуждение различных классических алгебро-геометрических объектов и конструкций в проективном пространстве, таких как конфигурации Дезарга и Паскаля, проективные коники и квадрики, поляры, гессианы, детерминантали, многообразия Сегре и Веронезе, грассманианы, и целого ряда других геометрических сюжетов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Задачи, связанные с теоремами Дезарга, Паппа, Паскаля, и др.
2. Задачи евклидоваой и других геометрий: решение средствами проективной геометрии.
3. Теорема Безу, индексы пересечения, правила Цейтена.
4. Поляры, гессианы, принцип двойственности.
5. Линейные ряды, линейные сечения и проекции, раздутия, джойны, мультисеканты, проективные касательные пространства к многообразиям.
6. Поверхности дель Пеццо, норммногообразия, квадрики.
7. Детерминантали, многообразия Сегре, Веронезе, их многообразия хорд.
8. Грассманианы, многообразия флагов, индукционная процедура построения грассманианов. Многомерные конфигурации прямых.
9. Замыкания Понселе и задачи классификации векторных расслоений.
10. Пространства «полных» квадрик, «полных» треугольников и задачи исчислительной геометрии.

УЧЕБНИКИ:

1. В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. Геометрия. М., МЦНМО, 2007.
2. А. Л. Городенцев. Курс геометрии для НМУ, 2016/17. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/list.html.
3. А. Л. Городенцев. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Екатеринбургские лекции 2012 г., http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/giag_ru/giag.pdf.
4. А. Л. Городенцев. Algebraic Geometry. A Start Up Course, М., МЦНМО, 2006, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz
5. J. G. Semple, J. T. Kneebone. Algebraic projective geometry. Oxford, 1963.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, АЛГЕБРЫ ЛИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

РУКОВОДИТЕЛИ: О. В. Шварцман, С. М. Натанзон, О. Шейнман

НАЗВАНИЕ: Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар рассчитан на магистрантов, аспирантов и студентов, начиная с третьего курса, а также профессиональных математиков. На семинаре обсуждаются новые результаты в актуальных областях математики, связанных с математической физикой. Среди докладчиков ведущие российские и зарубежные исследователи, рассказывающие о своих результатах, сотрудники, а иногда и студенты нашего факультета. Руководители семинара обычно просят докладчиков объяснять все понятия, выходящие за рамки 2-3 курса бакалавриата матфака.

ПРОГРАММА: в этом году ожидаются, среди прочих, такие доклады:

- В. М. Бухштабер (МИАН, МГУ). Фуллерены, многогранники Погорелова, проблема четырёх красок и трёхмерные гиперболические многообразия.
- И. М. Кричевер. Вырождения дифференциалов на римановых поверхностях.
- С. К. Ландо. Хроматический многочлен и интегрируемые системы.
- В. Рубцов. Декорированные многообразия характеров и поверхности монодромных данных, ассоциированные с уравнениями Пенлеве.
- П. Дунин–Барковский. Раскрашенные инварианты ХОМФЛИ торических узлов и операторы на пространстве полубесконечного внешнего произведения.
- Ю. Бурман. Числа Гурвица – Севери.
- А. Эстеров. Исчислительная геометрия и тропические теоремы соответствия.

КОММЕНТАРИЙ: Семинар работает с 2000 года. Занятия происходят в Независимом Московском Университете по пятницам с 17 до 19 часов. Аннотации докладов размещаются на http://ium.mccme.ru/f17/rsmph.html.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ»

РУКОВОДИТЕЛЫ: Л. Д. Беклемишев, А. В. Кудинов, Ф. Н. Пахомов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман

НАЗВАНИЕ: Современные проблемы математической логики

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Целью семинара является знакомство слушателей с интересными результатами и продвижениями последнего времени в математической логике. Большинство докладов будут обзорными.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: основы логики и теории множеств.

ПРОГРАММА: доклады на семинаре будут касаться таких тем как модальная логика, теория доказательств, λ-исчисление, теория индуктивных определений, семантика компьютерных языков и т. п.

УЧЕБНИКИ: «Справочная книга по математической логике» под ред. Дж. Барвайса.

КОММЕНТАРИЙ: научно-исследовательский семинар рассчитан на студентов второго курса и старше, однако участие особо заинтересованных первокурсников также не возбраняется.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ»

РУКОВОДИТЕЛЫ: Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников

НАЗВАНИЕ: Теория представлений

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар рассчитан на студентов 3 курса бакалавриата и выше, интересующихся алгеброй, а также на *мотивированных* второкурсников, *результативно* интересующихся алгеброй. Цель семинара — продемонстрировать основные методы теории представлений на простейших примерах, которые можно в явном виде разобрать до конца. Первая группа тем семинара концентрируется вокруг теоремы Габриэля. Грубо говоря, это утверждение о том, в каких случаях задача классификации набора линейных операторов между векторными пространствами с точностью до изоморфизма в принципе имеет ответ. Первая нетривиальная классификационная задача такого типа — известная задача о классификации троек подпространств в векторном пространстве с точностью до линейного изоморфизма. Удивительным образом, здесь в качестве ответа возникают графы Дынкина, классифицирующие также и другие важные и, казалось бы, никак не связанные алгебраические объекты: простые алгебры Ли и группы отражений. Мы постараемся объяснить связи между всеми этими объектами, не гнушаясь самых явных вычислений в очень конкретных случаях и таким образом разбираясь в них до конца. Для полноценного ответа на вопрос, как связаны друг с другом появления графов Дынкина в разных алгебраических задачах, требуется весь аппарат современной теории представлений. Вместе с участниками семинара мы постараемся продвинуться в этом направлении насколько возможно глубоко. Инициатива участников разбирать что-либо из тем семинара или смежных тем с последующим докладом на семинаре очень приветствуется.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Алгебра в объеме 1-2 курсов бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Представления колчанов. Простейшие примеры классификации неразложимых представлений.
2. Функторы отражения. Теорема Габриэля. Простейшие примеры вычисления Ext^1.
3. Соответствие МакКея.
4. Матрица Картана, связанная с колчаном.
5. Алгебры Холла, простейшие примеры.
6. Серровские соотношения и их q-аналоги.
7. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта и её обобщения.
8. Конструкции квантовых групп и их представлений.
9. Конструкции R-матриц.

УЧЕБНИКИ:

1. У. Фултон, Дж. Харрис. Теория представлений. Начальный курс.
2. Alexander Kirillov Jr. Quiver representations and quiver varieties.

КОММЕНТАРИЙ: Список тем семинара может сильно варьироваться в зависимости от состава и предпочтений его участников.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ТЕОРИЯ СТРУН И КЛАСТЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. В. Маршаков

НАЗВАНИЕ: Теория струн и кластерные многообразия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19, 2 пары в неделю, 5 кредитов за семестр.

ОПИСАНИЕ: Исследовательский семинар, посвящённый избранным главам теории струн, и близким к ним вопросам о суперсимметричных калибровочных теориях поля, двумерных конформных теорий и их деформаций, теории представлений, дифференциальных и разностных уравнений, интегрируемых систем на кластерных многообразиях.

ПРОГРАММА: Конкретная программа семинара во многом определяется интересами участников. В настоящий момент в центре внимания находится круг вопросов, определяемых нетривиальными связями между суперсимметричными и конформными теориями (АГТ-соответствие), топологическими струнами (topological vertex), представлениями деформированных алгебр вирасоровского типа, а также интегрируемыми системами на кластерных многообразиях, их связью с геометрией плоских кривых и трехмёрных многообразий и их деавтономизацией, ведущей к системам типа Пенлеве.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ТОРОИДАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И УРАВНЕНИЯ БЕТЕ»

РУКОВОДИТЕЛЬ: Б. Л. Фейгин

НАЗВАНИЕ: Тороидальные алгебры, интегрируемые системы и уравнения Бете

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2018/19 уч. г., 1 пара в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Тороидальные алгебры — очень важный и интересный математический объект. Смотреть на него можно как минимум тремя разными способами. Во-первых, тороидальные алгебры — это естественное обобщение аффинных квантовых групп. Многое из теории аффинных алгебр имеет тороидальные аналоги. Возможно, самая интересная часть относится к теории интегрируемых систем. Во-вторых такие алгебры можно понимать как деформации вертекс-операторных алгебр. А потому тороидальные алгебры возникают при изучении деформаций конформных (и даже неконформных) теорий поля. В-третьих, тороидальные алгебры используются в четырёхмерной (и не только) топологической теории поля. С математической точки зрения такие алгебры появляются при этом как алгебры Гекке (или Холла), действующие соответствиями на обобщённых когомологиях пространств модулей различных математических объектов. В курсе я собираюсь по мере возможности обо всем этом рассказать. Лекции начнутся с основных определений и теории представлений. Аналогии с теорией представлений W-алгебр очень важны. Все необходимое будет рассказано. Затем мы перейдём к интегрируемым системам и уравнениям Бете. Это все займёт большую часть годового курса. Что-то сказать про связи с топологическими теориями, квантовыми когомологиями, теорией узлов — наверное бегло и неполно, в конце курса. По ходу будут упражнения — элементарные и не очень.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: все это предназначается для магистрантов, аспирантов и продвинутых студентов, а так же для всех прочих.

СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

(СЕКЦИЯ ОБЯЗАТЕЛЬНОГО СЕМИНАРА МАГИСТРСКОЙ ПРОГРАММЫ «MATHEMATICS»)

MAY BE GIVEN IN ENGLISH

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский

НАЗВАНИЕ: Функциональный анализ и некоммутативная геометрия

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра, 5 кредитов за семестр, 1 пара в неделю.

ОПИСАНИЕ: Студенты-участники семинара выступают с докладами по разнообразным сюжетам, лежащим на стыке функционального анализа и некоммутативной геометрии. Также приветствуются доклады, относящиеся только к функциональному анализу (но не лишенные алгебраического аромата) или, наоборот, только к некоммутативной геометрии в широком понимании этого термина (в т.ч. к некоммутативной алгебраической геометрии). Темы для докладов берутся, как правило, из научной литературы; в отдельных случаях студенты излагают собственные результаты. Изредка с докладом выступает руководитель семинара либо приглашенный докладчик.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: желательно владеть базовыми понятиями алгебры и функционального анализа и любить какую-нибудь разновидность геометрии или топологии.

ПРОГРАММА: Несколько возможных (зачастую весьма обширных) тем для обсуждения, выбор среди которых будет зависеть от состава и предпочтений участников:

1. Квантовые ограниченные симметрические области и некоммутативный комплексный анализ в духе Л. Л. Ваксмана.
2. Строгое деформационное квантование (М. Риффел и др.).
3. Деформации C^*-алгебр (в широком смысле).
4. Некоммутативная комплексная аналитическая геометрия (А. Полищук, А. Шварц, П. Смит, М. Халхали, Дж. Ланди и др.).
5. Теоретико-операторный подход к некоммутативному комплексному анализу (У. Арвесон, Г. Попеску и др.).
6. Некоммутативные комплексные структуры и положительные коциклы Хохшильда (А. Конн, М. Халхали, Дж. Ланди и др.).
7. Некоммутативное интегрирование, некоммутативные L^p-пространства.
8. Некоммутативная геометрия PI-алгебр (алгебраическая и аналитическая).
9. Бивариантная K-теория и бивариантные периодические циклические гомологии (Г. Каспаров, Й. Кунц, Р. Майер и др.).
10. C^*-супералгебры (П. Белявски и др.).
11. DQ-модули (М. Кашивара, П. Шапира).
12. Голоморфные функции нескольких свободных переменных (Дж. Тэйлор, В. Винников, Д. С. Калюжный-Вербовецкий).

13. «Физические» аспекты некоммутативной геометрии (в т.ч. системы Боста – Конна).

УЧЕБНИКИ:

1. A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.
2. A. Connes, M. Marcolli. Noncommutative geometry, quantum fields and motives. AMS, 2008.
3. L. L. Vaksman. Quantum bounded symmetric domains. AMS, 2010.
4. M. A. Rieffel. Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 506.
5. J. Cuntz, R. Meyer, J. Rosenberg. Topological and bivariant K-theory. Birkhäuser, 2007.
6. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov. Foundations of free noncommutative function theory. AMS, 2014.
7. M. Kashiwara, P. Schapira. Deformation quantization modules. Astérisque No. 345 (2012).
8. K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Birkhäuser, 2002.

Seminar descriptions in English

Student research seminar «Convex and algebraic geometry»

ADVISORS: A. I. Esterov, V. A. Kiritchenko, E. Yu. Smirnov

TITLE: Convex and algebraic geometry

LEARNING LOAD: Two semesters of 2018/19 A. Y., 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Our research seminar is devoted to the many connections between convex and algebraic geometry. This interaction has many important applications in various areas of mathematics: combinatorics, representation theory, mathematical physics to name a few. One of the most well-known examples is the combinatorial description of the toric varieties in terms of polytopes. Yet another recent and up-to-date application is the theory of Newton – Okounkov bodies. Participants will tell about classical topics as well as recent papers that they find important on

http://arxiv.org/find/grp_math/1/AND+cat:+math.AG+all:+polytope/0/1/0/all/0/1
http://arxiv.org/find/grp_math/1/AND+cat:+math.RT+all:+polytope/0/1/0/all/0/1

providing extensive background material for those less familiar with the subject.

PREREQUISITES: Accessible to geometrically oriented 2nd year students. No prerequisites required beyond the mandatory courses from the 1st year (and the fall of the 2nd year, for the spring term). Introduction to algebraic geometry is a plus, but not required.

SYLLABUS:

- Convexity and lattices.
- Smooth convex bodies.
- Convex polyhedra.
- Mixed volumes.
- Convex inequalities.
- Ehrhart polynomials.
- Patchworking.
- Bernstein – Kushnirenko Theorem.
- Fiber polytopes and polyhedral subdivisions.
- Tropical and Enumerative Geometry.
- Coxeter groups and polytopes.
- Number of faces of a convex polytope.
- Gelfand – Zetlin polytopes and Schubert calculus.

TEXTBOOKS:

- Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A., Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants, 1994.
- Maclagan D., Sturmfels B., Introduction to Tropical Geometry, 2015
- Viro O., Itenberg I., Patchworking Algebraic Curves Disproves the Ragsdale Conjecture, 1996
- G. Ziegler, Lectures on Polytopes, 1995, https://books.google.ru/books?id=xd25TXSSUcgC&lpg=PP1&hl=ru&pg=PP1#v=onepage&q&f=false

STUDENT RESEARCH SEMINAR «COMBINATORICS OF VASSILIEV INVARIANTS»

ADVISORЫ: M. E. Kazarian, S. K. Lando

TITLE: Combinatorics of Vassiliev invariants

LEARNING LOAD: Two semesters of 2018/19 A. Y., 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: This students' research seminar is devoted to combinatorial problems arising in knot theory. The topics include finite order knot invariants, graph invariants, matroids, delta-matroids, integrable systems and their combinatorial solutions. Hopf algebras of various combinatorial species are studied. Seminar's participants give talks following resent research papers in the area and explaining results of their own.

PREREQUISITES: no.

SYLLABUS:

1. Knots and their invariants.
2. Knot diagrams and chord diagrams.
3. 4-term relations for chord diagrams, graphs, and delta-matroids.
4. Weight systems.
5. Constructing weight systems from Lie algebras.
6. Hopf algebras of graphs, chord diagrams and delta-matroids.
7. Combinatorial solutions to integrable hierarchies.
8. Khovanov homology

TEXTBOOKS:

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «DEFORMATION THEORY WITH THE VIEW OF MORI THEORY»

ADVISOR: V. S. Zhgoon

TITLE: Deformation theory with the view of Mori theory

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: The aim of the course is to give the introduction to the advanced topics of algebraic geometry which are usually omitted in the standard course. The fruitfull schematic approach of Grothendieck allows to construct such objects as: Hilbert scheme (which classifies the subschemes of a given scheme), Quot scheme and scheme of morphisms between two schemes. The deformation theory studies the infinitesimal structure of these schemes, that allows to say much about the objects where the deformations are considered. This idea was used by Mori who used the geometry of rational curves to study the birational geometry of projective varieties. In the course we shall discuss these variety of topics.

PREREQUISITES: Basic notions of algebraic geometry of schemes or a good knowledge of commutative algebra and basic algebraic geometry.

SYLLABUS:

1. Deformation theory. Deformations of different objects: schemes, sheaves, morphisms etc. Tangent spaces to the space of deformations. Infinitesimal obstructions.
2. Hilbert, Quot, Hom and Chow schemes.
3. Applications to the spaces of rational curves. Bend and break technique.
4. Multiplier ideals. Kawamata-Viehweg vanishing theorem. Shokurov non-vanishing and base-point-freeness theorem. Mori cone theorem.
5. Fulton – Hansen connectedness theorem and its applications to geometry of projective varieties. Zak theorems.

TEXTBOOKS:

1. Lazarsfeld, Robert K. Positivity in algebraic geometry I: Classical setting: line bundles and linear series. Vol. 48. Springer, 2004.
2. Hartshorne, Robin. Deformation theory. Vol. 257. Springer, 2009.
3. Debarre, Olivier. Higher-dimensional algebraic geometry. Springer, 2013.
4. Kollár, János. Rational curves on algebraic varieties. Vol. 32. Springer, 2013.
5. Esnault, Hélène, and Eckart Viehweg. Lectures on vanishing theorems. DMV seminar. 1992.
6. Matsuki, Kenji. Introduction to the Mori program. Springer, 2013.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «GEOMETRIC STRUCTURES ON MANIFOLDS»

(A SECTION OF THE OBLIGATORY MATH SEMINAR OF MSC PROGRAM «MATHEMATICS»)

ADVISOR: M. S. Verbitsky

TITLE: Geometric structures on manifolds

LEARNING LOAD: two semesters, 5 credits per semester, 1 class per week.

DESCRIPTION: Students of HSE give talks about current problems of algebraic and differential geometry.

PREREQUISITES: Analysis on manifolds, complex analysis, differential geometry.

SYLLABUS: Every week new speakers are chosen, with a new topics of their choice.

TEXTBOOKS:

A. Besse, «Einstein manifolds»

A. S. Mishchenko, «Vector bundles and their applications»

M. Gromov, «Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces»

P. Gauduchon, «Calabi's extremal Kähler metrics: An elementary introduction»

N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, «Hyperkähler metrics and supersymmetry», Comm. Math. Phys. **108** (1987), 535–589.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «HARMONIC ANALYSIS»

ADVISOR: A. Yu. Pirkovskii

TITLE: Harmonic analysis and unitary representations

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Harmonic analysis on groups and unitary representation theory are closely related areas of mathematics, complementary to each other. They play an important role in analysis, geometry, topology, physics, and other fields of science. In essence, they grew out of two classical topics that are usually studied by undergraduate students in mathematics. The two topics are the theory of trigonometric Fourier series and the representation theory (over $\mathbb{C}$) of finite groups. Among other things, we plan to explain what the above topics have in common, what the representation theory of compact groups looks like, what the Tannaka – Krein duality is, and what all this has to do with the Fourier transform. We are also going to construct harmonic analysis on locally compact abelian groups. This theory includes the Pontryagin duality and generalizes the Fourier transform theory on the real line. As an auxiliary material, the basics of Banach algebra theory will also be given.

PREREQUISITES: The Lebesgue integration theory and the basics of functional analysis. Some knowledge of the representation theory of finite groups will also be helpful.

SYLLABUS:

1. Introduction. A toy example: harmonic analysis on a finite abelian group. Classical examples: harmonic analysis on the integers, on the circle, and on the real line.
2. The main objects: topological groups; the Haar measure; a relation between the left and right Haar measures; unitary representations; the general Fourier transform.
3. Banach algebras: the L^1-algebra of a locally compact group; the spectrum of a Banach algebra element; commutative Banach algebras, the Gelfand spectrum, the Gelfand transform; basics of C^*-algebra theory; the C^*-algebra of a locally compact group; the 1st (commutative) Gelfand – Naimark theorem.
4. Locally compact abelian groups: the dual group; the Fourier transform as a special case of the Gelfand transform; the Plancherel theorem; the Pontryagin duality.
5. Compact groups: the averaging procedure; irreducible representations are finite-dimensional; decomposing unitary representations into irreducibles; the Peter – Weyl theorem; the orthogonality relations; the Fourier transform and its inverse; the Plancherel theorem; the Tannaka – Krein duality.

TEXTBOOKS:

1. A. Deitmar, S. Echterhoff. Principles of harmonic analysis. Springer, 2009.
2. G. B. Folland. A course in abstract harmonic analysis. CRC Press, 1995.
3. G. J. Murphy. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.
4. D. P. Zhelobenko. Principal structures and methods of representation theory. MCCME, 2004 (in Russian). English transl.: AMS, 2006.
5. A. Robert. Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups. Cambridge University Press, 1983.
6. K. H. Hofmann, S. Morris. The structure of compact groups. Walter de Gruyter, 2006.
7. A. Joyal, R. Street. An introduction to Tannaka duality and quantum groups. Lecture Notes in Math. 1488, 411–492. Springer, 1991.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «HOMOTOPY THEORY»

ADVISOR: A. G. Gorinov

TITLE: Homotopy theory

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: We give an introduction to generalised cohomology and stable homotopy theory. At first, we consider examples and a few applications of generalised homology and cohomology, such as the Bott periodicity, Hopf invariant 1, complex structures on spheres, representing classes by manifolds, cobordism rings. After that we develop a general theory: spectra, stable homotopy category, fibration and cofibration sequences, the Whitehead theorem, the Atiyah duality.

PREREQUISITES: Basic algebraic topology as covered, e.g., in [3] or [2, Ch.1-2]. However, the material of [3, Ch.4] and [2, Ch.1] will be recalled if necessary.

SYLLABUS:

1. Axioms for generalised (co)homology.
2. Cofibration sequences for spaces. Omega-spectra and cohomology theories.
3. Fibration sequences for spaces.
4. First applications: the Dold – Thom theorem, representing rational homotopy classes by manifolds.
5. Brown's representability theorem for cohomology.
6. Basic K-theory.
7. Complex Bott periodicity; extending the complex K-theory to a cohomology theory.
8. Applications of K-theory: the Hopf invariant 1 and almost complex structures on spheres.
9. Spectra and stable homotopy category. Homotopy groups of spectra.
10. Thom spectra and cobordism. The Pontrjagin – Thom theorem.
11. Calculation of $\pi_*(\mathrm{MO})$ and $\pi_*(\mathrm{MSO}) \otimes \mathbb{Q}$.
12. Whitehead's theorem for spectra.
13. Spectra can be desuspended.
14. Fibration and cofibration sequences for spectra.
15. Duality for spectra. The Alexander duality.
16. The Thom isomorphism for generalised cohomology and the Atiyah duality.
17. The topological Riemann – Roch theorem and applications. Schwarzenberger's conditions on the Chern numbers of complex vector bundles on $\mathbb{CP}^n$.

TEXTBOOKS:

1. J. Adams, Stable Homotopy and Generalised Homology.
2. D. Fuchs, A. Fomenko, A course in Homotopy Theory.
3. A. Hatcher, Algebraic Topology.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «INTEGRABLE SYSTEMS OF CLASSICAL MECHANICS»

ADVISOR: I. Marshall

TITLE: Integrable Systems of Classical Mechanics

LEARNING LOAD: Fall term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Integrable systems are Hamiltonian systems possessing a complete set of commuting integrals. Since the Kepler problem, which is perhaps the most important physical model in history, and throughout the development of classical mechanics and celestial mechanics, they make recurrent appearances. In modern times they continue to find applications in diverse areas of physics and mathematics, and their study involves many interesting mathematical techniques. In this course we will treat a series of examples by means of which we shall encounter some of the various methods and approaches used in the subject.

PREREQUISITES: It will be useful if students have some knowledge of classical mechanics, and already have some familarity with Lagrangian mechanics. If they have studied Hamiltonian systems, so much the better. Material from the 2nd year course «Calculus on Manifolds» will be sufficient for most of the technical parts of the course. Fundamental aspects will be revised during the first few seminars, and this course may be expected to be useful for the consolidation of concepts from all of the «prerequisites».

SYLLABUS:

1. First examples: Jacobi problem of geodesics on an ellipsoid, Neumann problem of harmonic oscillators on a sphere, Euler problem of rigid body motion, Kepler problem, KdV equation.
2. Review of differential geometry: smooth manifold, tangent and cotangent bundles, vector-fields and p-forms, exterior derivative, Lie derivative, symplectic structure, Poisson structure.
3. Darboux Theorem, generating functions, Liouville Theorem.
4. Euler, problem of two centres: Elliptic coordinates on $\mathbb{R}^n$, Lax representation, Garnier and Calogero – Moser systems.
5. The KdV story, and a superficial look at inverse scattering.
6. Lie groups, Lie algebras.
7. Involution theorems, the r-matrix, Toda models, Kowalevski top, Manakov top.
8. Hamiltonian reduction, examples — Calogero and others.

TEXTBOOKS:

- Reyman, Semenov–Tian-Shansky. «Integrable Systems» (in Russian).
- Bableon, Talon «Integrable Systems» (in English).

STUDENT RESEARCH SEMINAR «INTRODUCTION TO SYMPLECTIC AND CONTACT GEOMETRY»

ADVISOR: P. E. Pushkar

TITLE: An Introduction to Symplectic and Contact geometry

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 2 classes per week, 5 credits per semester.

DESCRIPTION: The course is centered on the notion of symplectic structure, contact structure, legendrian and contact manifolds. In each direction we start from the very basic definition.

PREREQUISITES: Introductory courses on differential manifolds and ordinary differential equations.

SYLLABUS:

A. Symplectic geometry
A.0 Linear symplectic geometry
A.1. Symplectic structure, Hamiltonian fields, Darboux theorem
A.2 Symplectic reduction.
A.3. Lagrangian manifolds, Maslov index.
A.4. First steps of symplectic topology (Morse theory, Arnold's conjectures, idea of Floer Homology).
A.5* Liouville – Arnold theorem, moment map. The Atiyah – Guillemin – Sternberg convexity theorem.

B. Contact geometry
B.1. Distributions, integrability, contact structures. Examples. One jets of functions.
B.2 Legendrian manifolds.
B.4. Contact geometry and first-order partial differential equations.
B.3. Differential geometry of plane curves and contact structure.
B.4 Generating families.
B.5. An introduction to Lagrangian and Legendrian singularities.

TEXTBOOKS:

Arnold V. I., Givental A. B. Symplectic geometry.
Arnold V. I. Mathematical Methods of Classical Mechanics.
Arnold, V. I., Gusein–Zade, S. M., Varchenko, A. N. Singularities of Differentiable Maps, Volume 1. Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «INTRODUCTION TO THE THEORY OF INTEGRABLE EQUATIONS»

ADVISOR: A. K. Pogrebkov

TITLE: Introduction to the Theory of Integrable Equations

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Creation and development of the theory of integrable equations is one of main achievements of the mathematical physics of the fall of the previous century. In our times ideas and results of this theory penetrate in many branches of the modern mathematics: from string theory to the theory of Riemann surfaces.

PREREQUISITES: analysis of one and several real variables, theory of complex variables, linear algebra, theory of linear partial differential equations.

SYLLABUS: Commutator identities on associative algebras; $\bar{\partial}$-problem and dressing operators; Lax pairs; Kadomtsev – Petviashvili equation; Soliton solutions of the KP equation; Two-dimensional reduction: KdV equation; Details of the Inverse scattering transform for KdV equation; Soliton solutions of the KdV equations, their properties; dispersion relation and integrals of motion; IST as canonical transformation.

TEXTBOOKS: Presentation of the theory of the KdV equation is based on the textbooks:

- S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskij, V. E. Zakharov. Theory of solitons. The inverse scattering methods. Contemporary Soviet Mathematics, 1984.
- F. Calogero, A. Degasperis. Spectral Transform and solitons, I. 1982.

Presentation of other topics is based on the current publications.

COMMENTS: reading course

STUDENT RESEARCH SEMINAR «PROBABILITY AND STOHASTICS»

ADVISORS: A. V. Kolesnikov, V. Konakov

TITLE: Probability Theory with Analytical and Economical Applications.

LEARNING LOAD: Two semesters of 2018/19 A. Y., 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: We discuss all kind of problems related to probabilistic methods in analysis and various applications. The discussed topics cover a broad area and vary every year. The content highly depends on the interest of invited lectureres and participating students.

PREREQUISITES: standard linear algebra and analysis, ordinary differential equations. Some experience in functional analysis and stochastics is desirable.

SYLLABUS: List of some regularly discussed topics.

- Stochastic differential equations with applications in finance
- Random matrices
- Convex geometry and probability
- Probabilistic and economic applications of the Monge-Kantorovich problem and other extremal problems
- Martingale theory, its financial applications
- Probability distributions on Lie groups
- Stochastic Riemannian geometry
- Infinite-dimensional distributions, Gaussian measures
- Elements of the game theory
- Physical methods in economics
- Levy processes

STUDENT RESEARCH SEMINAR «REPRESENTATIONS AND PROBABILITY»

ADVISOR: A. I. Bufetov (Steklov Math. Inst.), A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski

TITLE: Representations and Probability (joint with Steklov Math. Inst. and IUM)

LEARNING LOAD: Two semesters of 2018/19 A. Y., 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: The seminar is mostly aimed to 3–4th year bachelor students, as well as master and PhD students. Senior participants are expected to deliver a talk on the seminar. The seminar topics are the mix of modern results in areas related to representations and probability theory, and older areas, which are prerequisites to the former, as well as keep their own value.

PREREQUISITES: Standard courses of calculus, algebra, and probability.

SYLLABUS: Tentative topics for fall semester:

- Continuous-time Markov chains and their asymptotical behavior.
- Empirical and invariant measures for Markov chains. Potential theory for Markov chains.
- Determinantal point processes. Results connecting them with Markov chains.
- Large-time behavior of diffusion process. Applications to non-equilibrium statistical mechanics.

Tentative topics for spring semester:

- Classical representations theory.
- Representations of infinite-dimensional groups
- Their connections with algebraic combinatorics (symmetric functions), classical analysis (orthogonal polynomials) and probabilities theory (point processes and Markov dynamics).

TEXTBOOKS:

[1] I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. Introduction to the theory of random processes. Dover 1996 (Русский оригинал: И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов)

[2] S. Kuksin, A. Shirikyan. Mathematics of two-dimensional turbulence. CUP, 2012.

[3] A. Borodin, G. Olshanski. Representations of the infinite symmetric group. CUP, 2017.

COMMENTS: Seminar is held at the Steklov Mathematical Institute in fall semester and at HSE in spring semester. Semesters can be taken independently.

STUDENT RESEARCH SEMINAR «SMOOTH, PL-, AND TOPOLOGICAL MANIFOLDS»

ADVISOR: A. G. Gorinov

TITLE: Smooth, PL and topological manifolds

LEARNING LOAD: Spring term of 2018/19, 1 class per week, 3 credits per semester

DESCRIPTION: Suppose we are given a topological manifold X. When does it admit a smoothing? In other words, when does there exist a smooth manifold Y which is homeomorphic to X? And if there does, then how many, up to diffeomorphism? Surprisingly, the answer to these and similar questions can be given in terms of homotopy classes of maps into certain classifying spaces. The aim of the seminar is to provide an introduction to these topics. In particular, we will construct examples of topological manifolds that admit no PL structures and of PL manifolds that admit no smooth structures.

PREREQUISITES: smooth manifolds, basic algebraic topology as covered, e.g., by A. Hatcher's «Algebraic topology»; some knowledge of Morse theory and surgery theory would be useful, but we will recall everything we will need.

SYLLABUS:

- Microbundles.
- The Kister – Mazur theorem; the tangent bundle of a topological manifold.
- PL manifolds and their tangent bundles.
- Classifying spaces for PL bundles.
- Obstructions to smoothing a PL manifold. The homotopy groups of PL/DIFF are the groups of homotopy spheres.
- Smoothing handles.
- The product structure theorem.
- Milnor's smoothing theorem.
- TOP/PL $= K(\mathbb{Z}/2, 3)$ (a sketch).
- Examples

TEXTBOOKS: smoothings of piecewise linear manifolds by A. Hirsch and B. Mazur, foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations by R. Kirby and L. Siebenmann, topics in geometric topology from lecture notes by J. Lurie.